
HASL社製品改良成果資料(I)

(発表用ダイジェスト版)

HASL 相談役・技術顧問

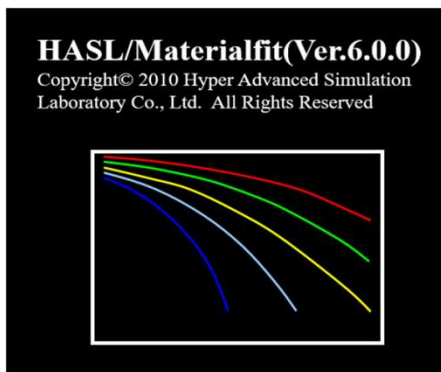
谷藤 真一郎

2026/09/29

株式会社HASL

この一年(2025~2026年)の追求テーマ

① Material fit Ver.6.0.0

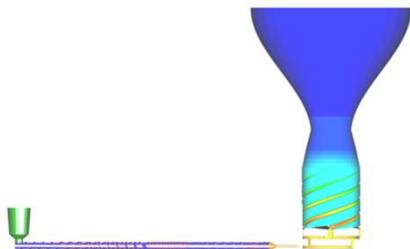


- ・非線形純粘性モデルの拡充
- ・線形粘弾性モデリング機能の再構築
チフォノフ正則化 (Tikhonov regularization)
Lカーブ法

② Inflation film simulator Ver.1.0.0

Film Inflation Simulator (Ver.1.0.0)

Copyright© 2026- Hyper Advanced Simulation
Laboratory Co., Ltd. All Rights Reserved



- ・幾何学的/材料非線形問題
(Geometric and material non-linear problem)
の逆解析ソルバーの開発

弾性法則と粘性法則

1)



Robert Hooke (1635-1703)

Hooke's law of elasticity (1676)

$$\tau = G\gamma$$

τ : 応力 $[\text{N/m}^2] = [\text{Pa}]$

G : 弾性率 $[\text{Pa}]$

η : 粘性率 $[\text{Pa} \cdot \text{s}]$

γ : ひずみ $[-]$

2)



Issac Newton (1643-1727)

Newton's law of viscosity (1686)

$$\tau = \eta \dot{\gamma} = \eta \frac{d\gamma}{dt}$$

$\dot{\gamma} \equiv \frac{d\gamma}{dt}$: ひずみ速度 $[\text{s}^{-1}]$

プリンピキア : Philosophiae Naturalis Principia Mathematica
3巻構成の数学的自然科学書

Navier stokes equation (1845)

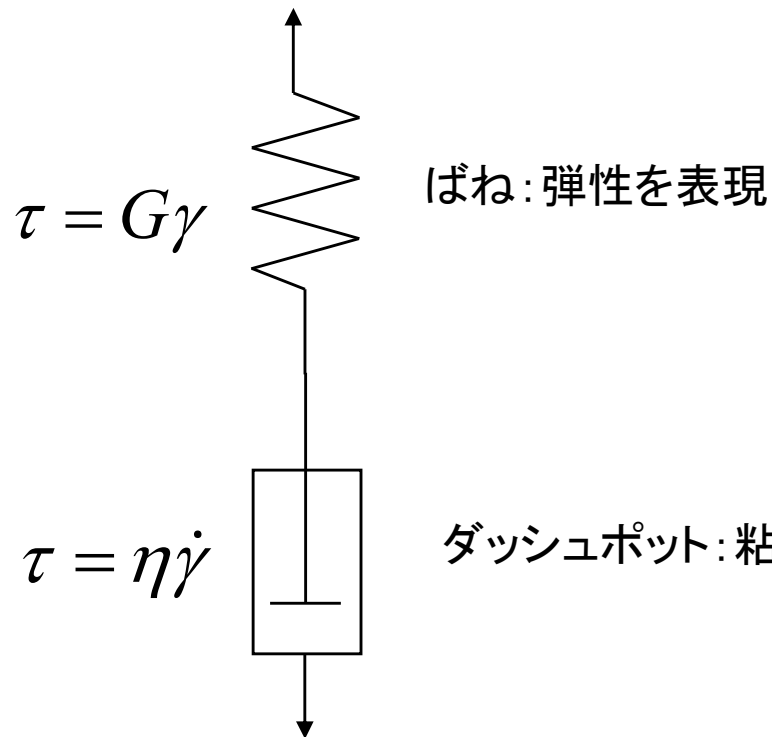
formulated by George Gabriel Stokes (1819-1903)

江戸時代(1603-1868),黒船(ペリー)来航(1853)

1) <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=Robert+Hooke&title=Special%3AMediaSearch&type=image>

2) <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=Issac+Newton&title=Special%3AMediaSearch&type=image>

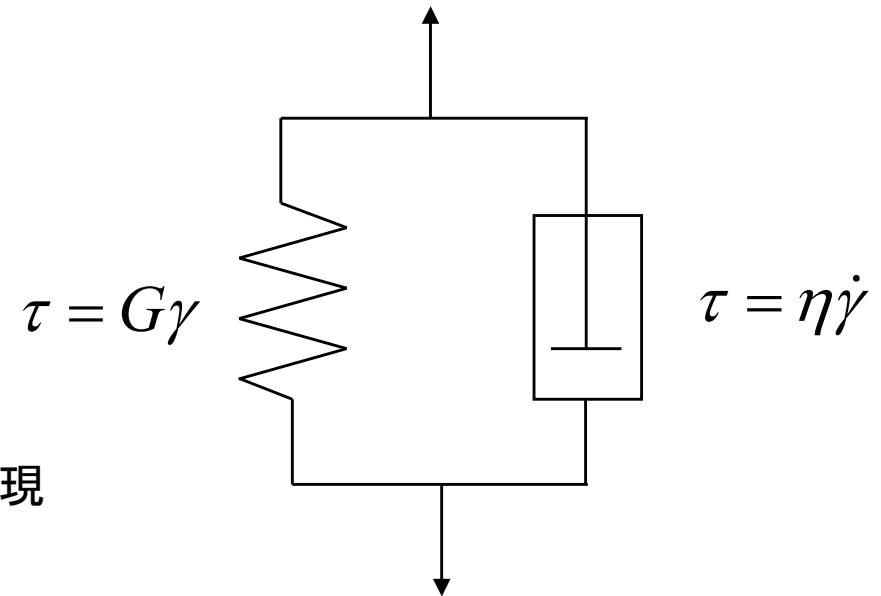
Maxwell モデル³⁾ と Kelvin-Voigt モデル



- ・応力共通、ひずみは各要素成分の和
- ・一定応力 τ 条件下でひずみ $\gamma \rightarrow \infty$

流体解析用

Maxwell モデル



- ・ひずみ共通、応力は各要素成分の和
- ・一定応力 τ 条件下でひずみ $\gamma \rightarrow \tau/G$

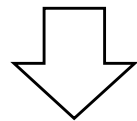
構造解析用

Kelvin-Voigt モデル

3) 'On the Dynamical Theory of Gases', J. C. Maxwell,
Proceedings of the Royal Society of London, 15, 167-171(1867)
A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field(1864)

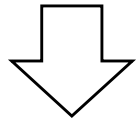
Maxwell モデルを利用した 貯蔵/損失弾性率 (Storage/Loss modulus) の表現

$$\gamma = \gamma_{elasticity} + \gamma_{viscosity} \quad \because \text{Maxwell モデルでは全体ひずみは各要素成分の和}$$



時間変化を採る (ニュートンの粘性体構成方程式がひずみ速度を含むため)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_{elasticity}}{dt} + \frac{d\gamma_{viscosity}}{dt}$$



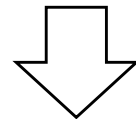
各構成方程式を代入

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}$$

$$\frac{d\gamma_{elasticity}}{dt} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{d\gamma_{viscosity}}{dt} = \frac{\tau}{\eta}$$

弾性体構成方程式
(Hooke)

粘性体構成方程式
(Newton)



$$G\lambda = \eta$$

を利用して式を簡潔に表現

※この段階で緩和時間: λ [s] が導入された。

$$\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\lambda} = G \frac{d\gamma}{dt} \quad \text{Or} \quad \lambda \frac{d\tau}{dt} + \tau = \eta \frac{d\gamma}{dt}$$

完全な弾性体: $\lambda \rightarrow \infty$

完全な粘性体: $\lambda \rightarrow 0$

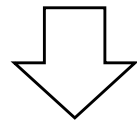
正弦波振動ひずみ $\gamma(t) = \gamma_a \sin(\omega t)$ に対する 応力 $\tau(t)$ の時間発展方程式

4)

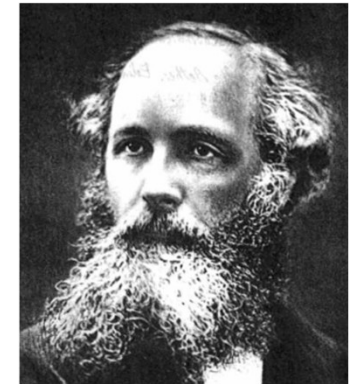
$$\frac{d\tau(t)}{dt} + \frac{\tau(t)}{\lambda} = G\omega\gamma_a \cos(\omega t), \quad \tau(0) = 0$$

γ_a : 振動ひずみの振幅[－]

ω : 周波数[s⁻¹]



定係数変化法
(非斉次線形常微分方程式を
解析する際の常套手段)



James Clerk Maxwell (1831-1879)

$$\tau(t) = G \underbrace{\frac{\omega^2 \lambda^2}{1 + \omega^2 \lambda^2} \gamma_a \sin(\omega t)}_{\text{正弦波振動ひずみと同位相}} + G \underbrace{\frac{\omega \lambda}{1 + \omega^2 \lambda^2} \gamma_a \cos(\omega t)}_{\text{正弦波振動ひずみから } \pi/2(90^\circ) \text{ 位相が進む}} - G \underbrace{\frac{\omega \lambda}{1 + \omega^2 \lambda^2} \gamma_a \exp(-t / \lambda)}_{\text{スタートアップ時の過渡的応答 } t \rightarrow \infty \text{ で } 0}$$

4) <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=Maxwell&title=Special%3AMediaSearch&type=image>

動的粘弾性測定装置の初期的な過渡応答が消滅した段階で、応力 $\tau(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\tau(t) &= G \frac{\omega^2 \lambda^2}{1 + \omega^2 \lambda^2} \gamma_a \sin(\omega t) + G \frac{\omega \lambda}{1 + \omega^2 \lambda^2} \gamma_a \cos(\omega t) \\ &= G' \gamma_a \sin(\omega t) + G'' \gamma_a \cos(\omega t) \\ &= \sqrt{G'^2 + G''^2} \gamma_a \sin(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

∴ 三角関数の合成則

$$A \sin \theta + B \cos \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta + \delta),$$

$$\tan \delta = \frac{B}{A}$$

貯蔵弾性率(Storage modulus) [Pa]

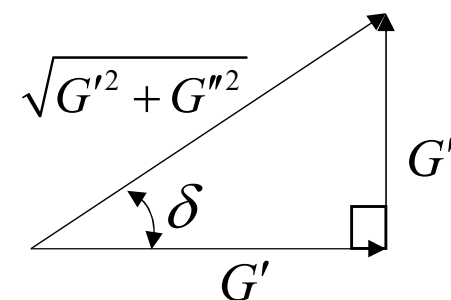
$$G' = G \frac{\omega^2 \lambda^2}{1 + \omega^2 \lambda^2}$$

損失弾性率(Loss modulus) [Pa]

$$G'' = G \frac{\omega \lambda}{1 + \omega^2 \lambda^2}$$

損失角(Loss angle) [—]

$$\tan \delta = \frac{G''}{G'} = \frac{1}{\omega \lambda}$$



完全な弾性体: $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \tan \delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ 位相差無
完全な粘性体: $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \tan \delta = \infty \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$ 位相差有(90°)

振動ひずみ一周期分で発生する 単位体積当たりのエネルギー

$$w: [Pa] = \left[\frac{N}{m^2} \right] = \left[\frac{Nm}{m^3} \right] = \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

$$w = \oint \tau(t) d\gamma = \int_0^T \tau(t) \frac{d\gamma}{dt} dt$$

$$= \int_0^T \left[G' \gamma_a \sin(\omega t) + G'' \gamma_a \cos(\omega t) \right] \gamma_a \omega \cos(\omega t) dt$$

$$= G' \gamma_a^2 \omega \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt + G'' \gamma_a^2 \omega \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

0

G' (弾性)成分はエネルギーを貯蔵

$$\frac{G'' \gamma_a^2 \omega T}{2} = G'' \gamma_a^2 \pi \leftarrow \text{粘性発熱: } \int_0^T \eta \dot{\gamma}^2 dt = \int_0^T \tau \frac{d\gamma}{dt} dt$$

G'' (粘性)成分はエネルギーを損失

$$\therefore \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \sin\left(\frac{4\pi}{T} t\right) dt = -\frac{T}{8\pi} \left[\cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) \right]_{t=0}^{t=T} = -\frac{T}{8\pi} (1-1) = 0$$

$$\therefore \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt = \int_0^T \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)}{2} dt = \frac{T}{2} + \frac{T}{8\pi} \left[\sin\left(\frac{4\pi}{T} t\right) \right]_{t=0}^{t=T} = \frac{T}{2} + \frac{T}{8\pi} (0-0) = \frac{T}{2}$$

貯蔵/損失弾性率の周波数・緩和時間依存性(単一モードの場合)

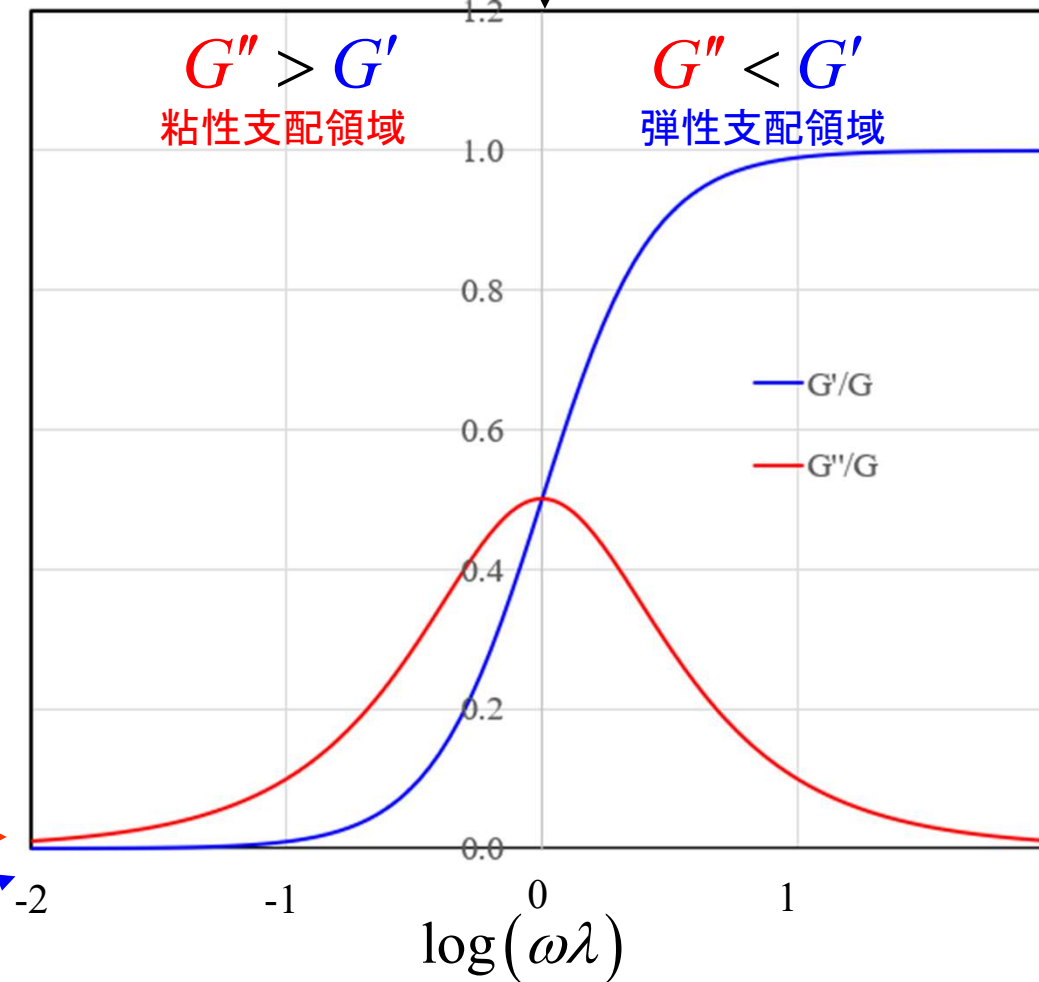
クロスフィールド周波数 : $\omega\lambda = 1 \Rightarrow G' = G'' = \frac{G}{2}$

$$\begin{cases} G' = G \frac{\omega^2 \lambda^2}{1 + \omega^2 \lambda^2} \\ G'' = G \frac{\omega \lambda}{1 + \omega^2 \lambda^2} \end{cases}$$

$\omega\lambda = \frac{G'}{G''} = \frac{\text{弾性力}}{\text{粘性力}}$
: ワイセンベルグ数
(Weissenberg number)

$\lim_{\omega\lambda \rightarrow 0} G'' / \omega = G\lambda = \eta$

$\lim_{\omega\lambda \rightarrow 0} G' / \omega = 0$

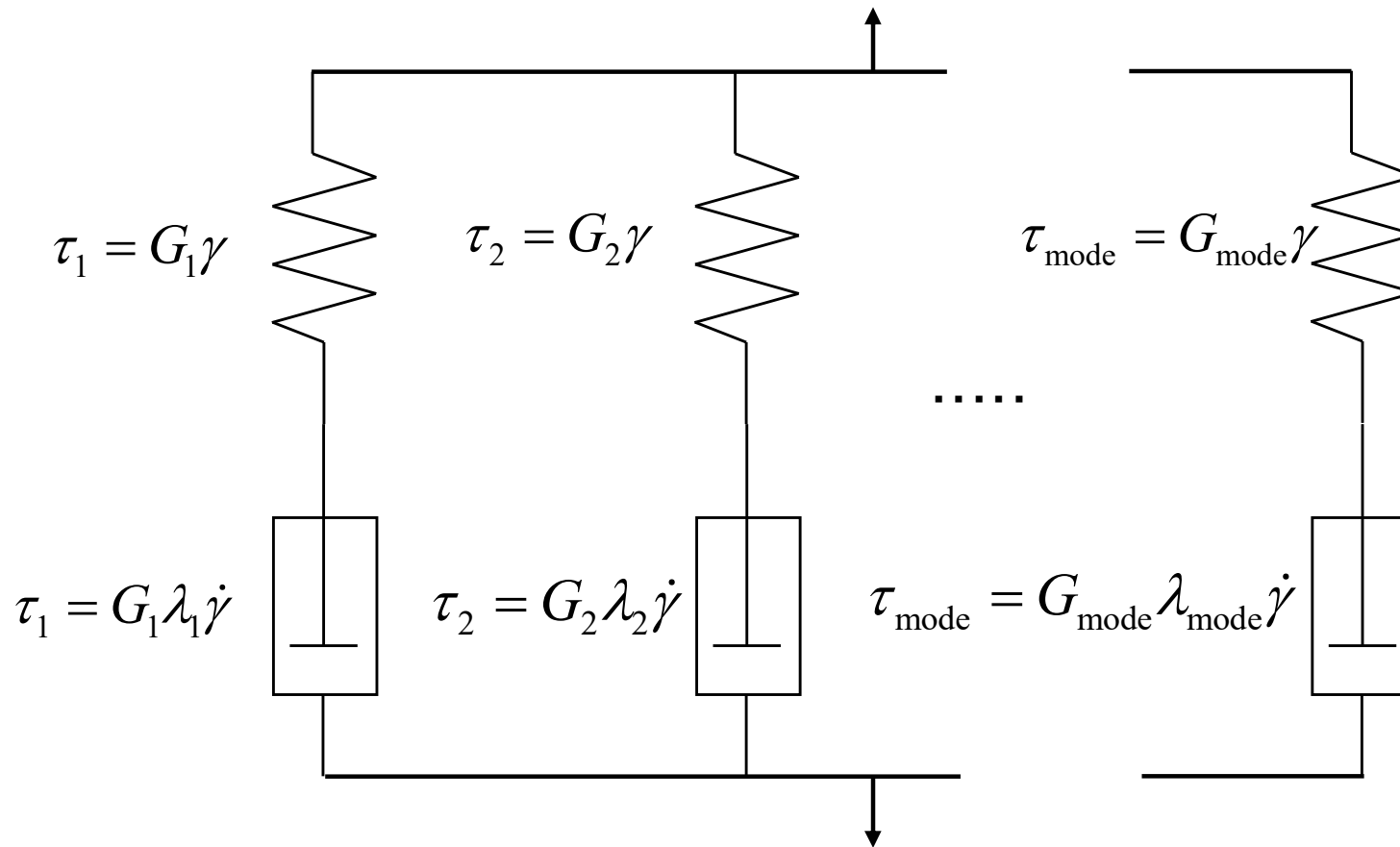


$\lim_{\omega\lambda \rightarrow \infty} G' = G$

$\lim_{\omega\lambda \rightarrow \infty} G'' = 0$

一般化Maxwell モデル

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\text{mode}} \tau_k(t) = \sum_{k=1}^{\text{mode}} G_k \frac{\omega^2 \lambda_k^2}{1 + \omega^2 \lambda_k^2} \gamma_a \sin(\omega t) + \sum_{k=1}^{\text{mode}} G_k \frac{\omega \lambda_k}{1 + \omega^2 \lambda_k^2} \gamma_a \cos(\omega t)$$



緩和時間の温度依存性

$$G\lambda = \eta$$

$$\lambda_k(T) = a_T(T_r)\lambda_k(T_r)$$

$$\begin{cases} T: & \text{温度 [K]} \\ T_r: & \text{基準温度 [K]} \\ a_T(T_r): & \text{温度シフトファクター[-]} \end{cases}$$

Arrhenius型シフトファクター

$$a_T(T_r) = \exp\left[\frac{E_a}{R_g}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r}\right)\right]$$

ガラス転移温度 T_g より十分
高温/低温側で有効

$$\begin{cases} E_a: & \text{活性化エネルギー [J/mol]} \\ R_g: & \text{気体定数 8.314 [J/mol/K]} \end{cases}$$

WLF(Williams-Landel-Ferry)型シフトファクター

$$a_T(T_r) = \exp\left[-\frac{C_1(T - T_r)}{C_2 + (T - T_r)}\right]$$

ガラス転移温度 T_g 付近で有効

$$\begin{cases} C_1: & \text{モデルパラメータ[-]} \\ C_2: & \text{モデルパラメータ [K]} \end{cases}$$

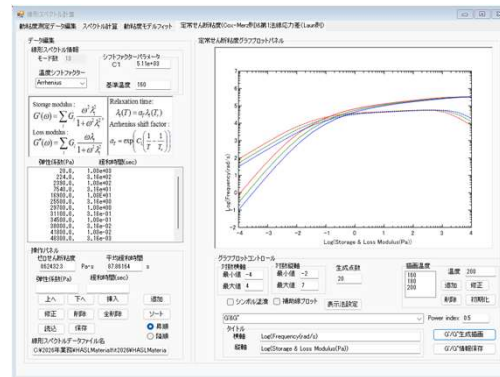
※何故、弾性率の温度依存性ではなく、緩和時間の温度依存性としてモデル化するのか？

理由: 異なる温度レベルで測定された $\log(G')$, $\log(G'')$ vs $\log(\omega)$ の特性が、横軸($\log(\omega)$)に対する平行移動で互いに重なり合う観測事実(温度時間換算則)を表現するため。

離散型緩和弾性率 G_k と緩和時間 λ_k を用いて計算される諸量

① 貯蔵/損失弾性率の周波数依存性

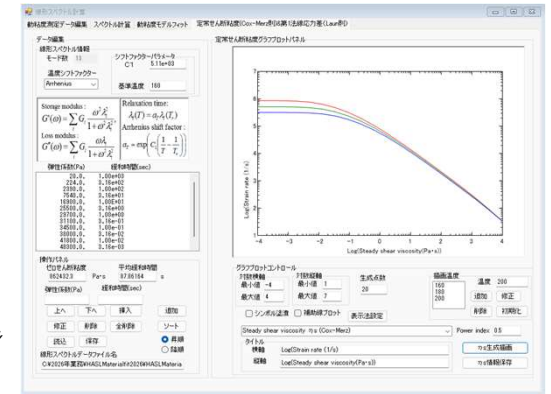
$$\begin{cases} G'(\omega) = \sum_{k=1}^{\text{mode}} G_k \frac{\omega^2 \lambda_k^2}{1 + \omega^2 \lambda_k^2} \\ G''(\omega) = \sum_{k=1}^{\text{mode}} G_k \frac{\omega \lambda_k}{1 + \omega^2 \lambda_k^2} \end{cases}$$



② 定常せん断粘度のひずみ速度依存性 (Cox-Merz則⁵⁾)

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \frac{\sqrt{G'^2 + G''^2}}{\omega} \bigg|_{\omega=\dot{\gamma}}$$

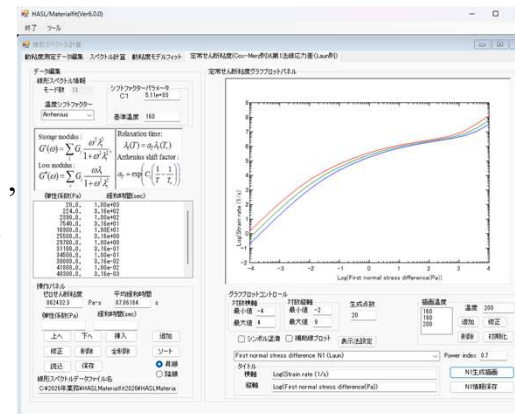
$$= \frac{G''}{\omega} \left[1 + \left(\frac{G'}{G''} \right)^2 \right]^{0.5} \bigg|_{\omega=\dot{\gamma}}$$



③ 定常第1法線応力差のひずみ速度依存性 (Laun則⁶⁾)

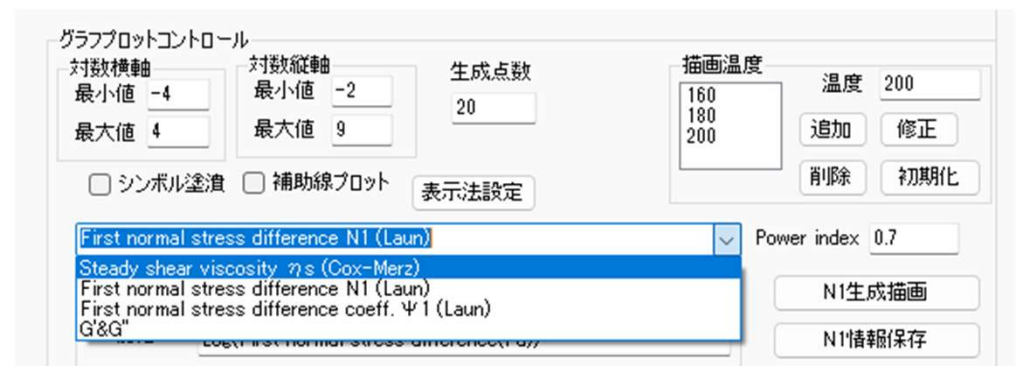
$$N_1(\dot{\gamma}, T) = 2G' \left[1 + \left(\frac{G'}{G''} \right)^2 \right]^{0.7} \bigg|_{\omega=\dot{\gamma}}$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}, T) = \frac{N_1(\dot{\gamma}, T)}{\dot{\gamma}^2}$$



5) “Correlation of dynamic and steady flow viscosities”, W. P. Cox and E. H. Merz, *J. Polymer Sci.*, **29**, 118, 619-622(1958) 昭和33年

6) “Prediction of elastic strains of polymer melts in shear and elongation”, H. M. Laun, *J. Rheo.*, **30**, 3, 459-501(1986) 昭和61年



Material fit Ver.6 追加出力項目

離散型緩和弾性率 G_k と緩和時間 λ_k の計算方法

残差最小化問題

$$V(\mathbf{G}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_S} \left(\frac{1}{G'_e(\omega_i)} \sum_{k=1}^{\text{mode}} G_k \frac{\omega_i^2 \lambda_k^2}{1 + \omega_i^2 \lambda_k^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_L} \left(\frac{1}{G''_e(\omega_i)} \sum_{k=1}^{\text{mode}} G_k \frac{\omega_i \lambda_k}{1 + \omega_i^2 \lambda_k^2} - 1 \right)^2$$

$V(\mathbf{G})$:	コスト関数
$\chi(\mathbf{G}) = \sqrt{V(\mathbf{G})}$:	残差
$G'_e(\omega_i)$:	貯蔵弾性率実測値
$G''_e(\omega_i)$:	損失弾性率実測値
N_S :	貯蔵弾性率の実測ポイント数
N_L :	損失弾性率の実測ポイント数
mode:	モード数(緩和スペクトルのモデル離散点数)

※ 離散型緩和時間はマスターカーブの周波数域から求められる緩和時間域を等対数刻み幅で離散化し予め決定。従って、残差最小化の未知量として求められるのは離散型緩和弾性率: $G_k(k=1 \sim \text{mode})$ のみ。

線形最小二乗法 (Linear Least Squares)

$$\frac{\partial V(\mathbf{G})}{\partial G_l} = 0 \quad \text{for } l = 1 \sim \text{mode}$$



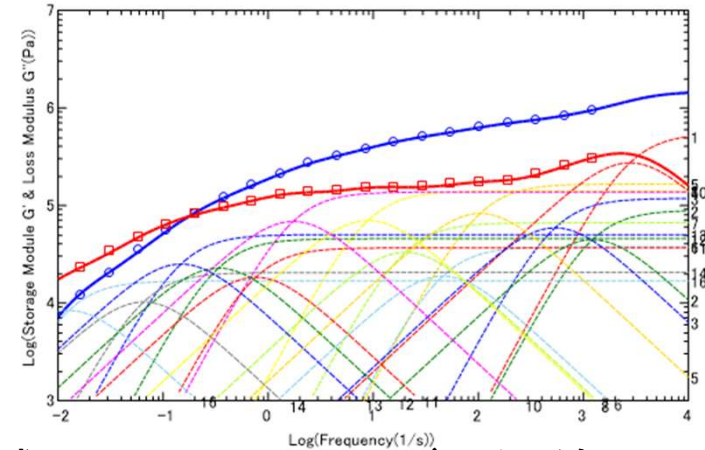
mode × mode の線形連立方程式

$$A_{lk} G_k = B_l \quad \text{for } l, k = 1 \sim \text{mode}$$

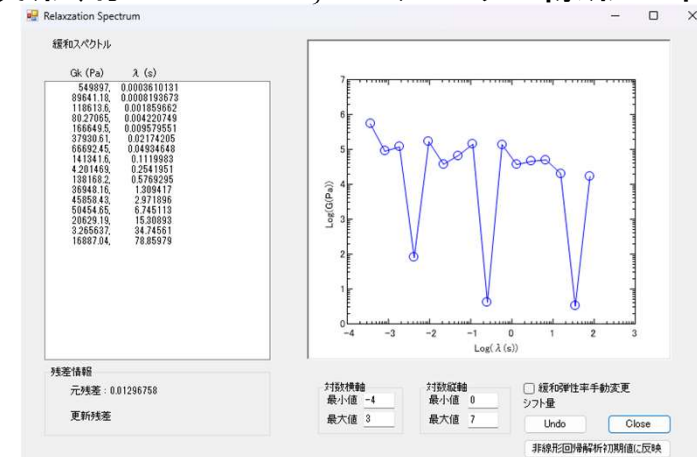
given unknown given

$$A_{lk} = \sum_{i=1}^{N_S} \left(\frac{1}{(G'_e(\omega_i))^2} \frac{\omega_i^2 \lambda_l^2}{1 + \omega_i^2 \lambda_l^2} \sum_{k=1}^{\text{mode}} \frac{\omega_i^2 \lambda_k^2}{1 + \omega_i^2 \lambda_k^2} \right) + \sum_{i=1}^{N_L} \left(\frac{1}{(G''_e(\omega_i))^2} \frac{\omega_i \lambda_l}{1 + \omega_i^2 \lambda_l^2} \sum_{k=1}^{\text{mode}} \frac{\omega_i \lambda_k}{1 + \omega_i^2 \lambda_k^2} \right)$$

$$B_l = \sum_{i=1}^{N_S} \left(\frac{1}{G'_e(\omega_i)} \frac{\omega_i^2 \lambda_l^2}{1 + \omega_i^2 \lambda_l^2} \right) + \sum_{i=1}^{N_L} \left(\frac{1}{G''_e(\omega_i)} \frac{\omega_i \lambda_l}{1 + \omega_i^2 \lambda_l^2} \right)$$



熱成形用ABSのG', G'' データ⁷⁾ 線形フィット例



Log(G_k) vs. log(λ_k) のグラフプロット ($k=1 \sim 16$)

※ G' , G'' のフィッティング状況は良好。

しかし、 G_k は激しく振動し、許容不可。

モード数を増加させると更に問題は悪化。

7) “Experimental determination of the viscoelastic parameters of K-BKZ model and the influence of temperature field on the thickness distribution of ABS thermoforming”, J. Cha, M. Kim, D. Park, and J. S. Go, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 103, 985-995(2019)

悪条件線形問題(ill-posed linear problem)に対する対処策⁹⁾

① チョーグル(Tschoegl) 近似公式⁸⁾を利用した初期値設定

② 非負対策 $G_k = e^{h_k} \Delta \ln \lambda_k$

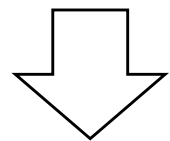
8) N.W. Tschoegl, "The theory of linear Viscoelastic Behavior", Academic Press, New York(1981)

③ チフォノフ正則化(Tikhonov regularization) : Material fit Ver.6.0.0 新規実装機能

$$V(\mathbf{G}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_s} \left(\frac{\Delta \ln \lambda}{G'_e(\omega_i)} \sum_{k=1}^{\text{mode}} e^{h_k} \frac{\omega_i^2 \lambda_k^2}{1 + \omega_i^2 \lambda_k^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_L} \left(\frac{\Delta \ln \lambda}{G''_e(\omega_i)} \sum_{k=1}^{\text{mode}} e^{h_k} \frac{\omega_i \lambda_k}{1 + \omega_i^2 \lambda_k^2} - 1 \right)^2 + \Gamma \sum_{k=1}^{\text{mode}} \left(\frac{d^2 h}{d \lambda^2} \right)_{\lambda=\lambda_k}^2 \Delta \ln \lambda$$

チホノフ正則化 (Tikhonov regularization) 項

Γ : 正則化パラメータ



非線形最小二乗法 (Non-Linear Least Squares)

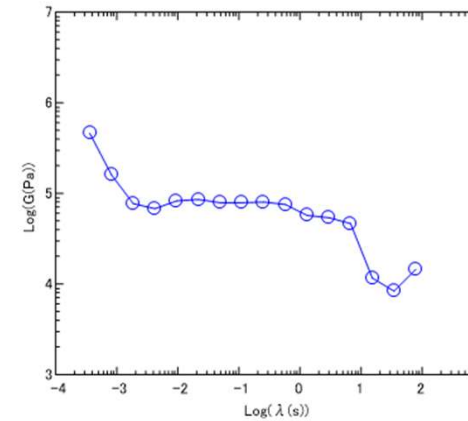
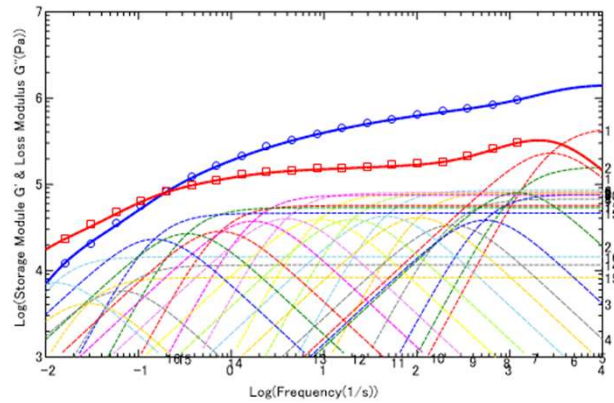
by レーベンバーグマルカート(Levenberg-Marquardt)法

$G_k, k = 1 \sim \text{mode}$

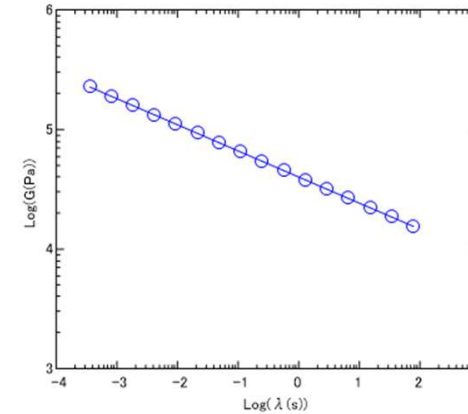
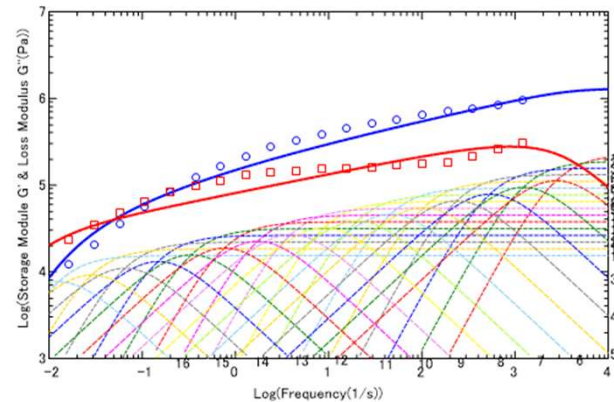
9) "A Computer program extract the continuous and discrete relaxation spectra from dynamic viscoelastic measurements",
A. Takeh and S. Shanbhag, *Appl. Rheol.*, **23**(2013)24628-1,24628-10

IRIS(Interactive Rheology Information System) produced by Prof. H. Henning Winter
(University of Massachusetts Amherst) and his collaborators

$$\Gamma = 10^{-3}$$



$$\Gamma = 10^6$$

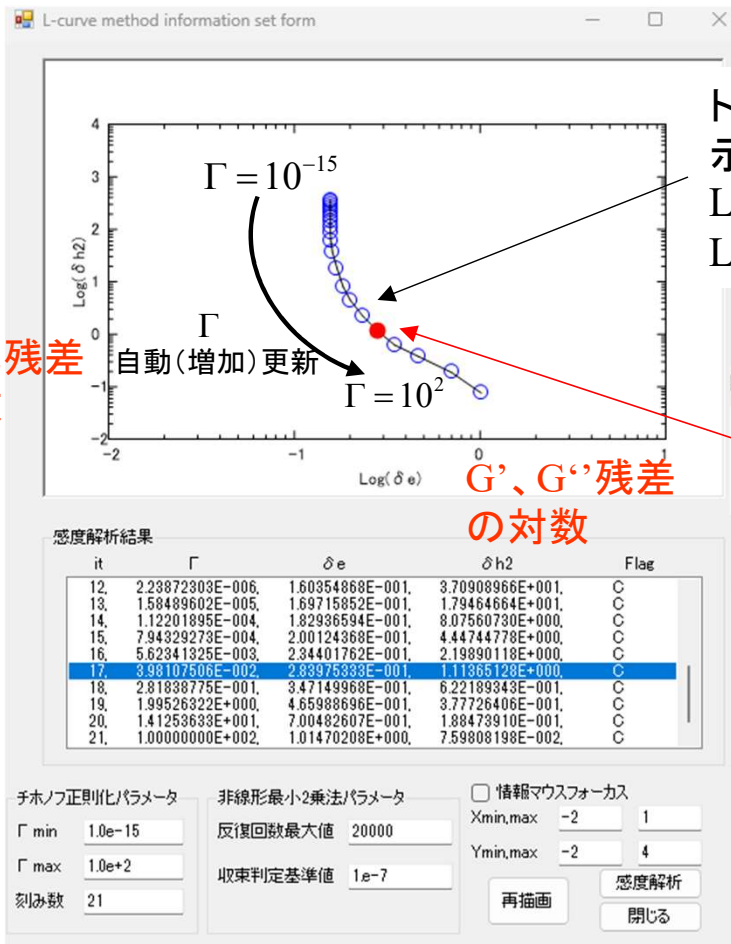


※チフォノフ正則化係数 Γ が小さいと G' , G'' のフィッティング状態は良好だが、 G_k の平滑化が不十分。逆に大きいと過度に平滑化(線形化)され、フィッティング状態が悪化する。

Lカーブ法(Material fit Ver.6.0.0 新規実装機能)

自動感度(非線形フィッティング)解析を通じて、チフォノフ正則化係数の適性値を推定

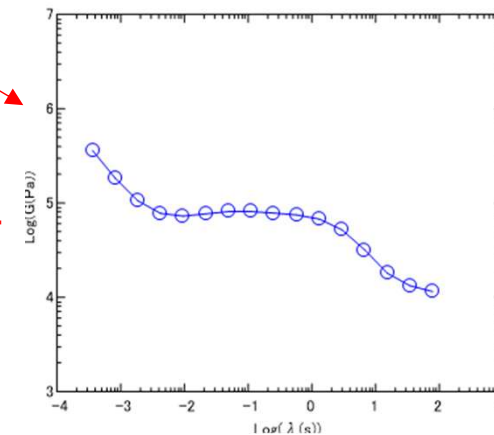
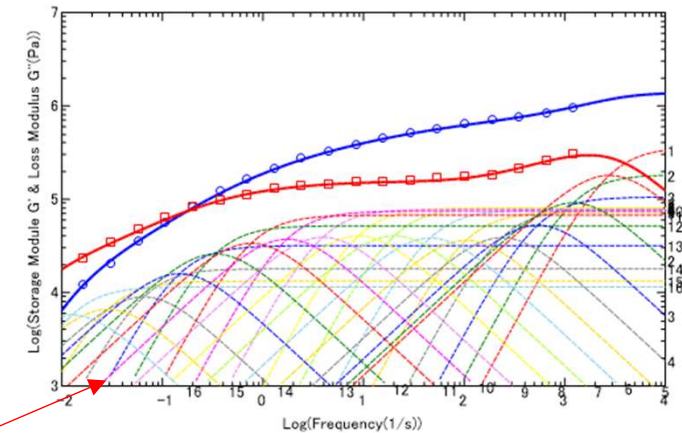
平滑化残差
の対数



トレードオフの関係を
示す残差特性が文字
Lに似ていることから
Lカーブ法と呼称

HASLMaterialFitVer6.0.0
 Selected gammaopt= .03981075
 OK

マウス選択された Γ 情報を
非線形最小二乗法解析に
インタラクティブに反映



※実測データのフィッティング状態が良好で且つ平滑な
離散型緩和弾性率 G_k と緩和時間 λ_k の定量化に成功!!!

Lカーブ計算設定フォーム

② Inflation film simulator Ver.1.0.0

フィルムインフレーションプロセスの支配方程式^{10),11),12)}

層厚方向の力の釣り合い式(2階非線形O.D.E. (Original Differential Equation))

$$2C^2 r^2 \left[f_0 + B(r^2 - 1) \right] \frac{d^2 r}{dz^2} = 6C\hat{\eta} \frac{dr}{dz} + r \left[f_0 - B(3r^2 + 1) \right] \left[1 + C^2 \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]$$

軸方向の力の釣り合い式(1階O.D.E.)

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dz} = \frac{1}{4C\hat{\eta}} \left[f_0 + B(r^2 - 1) \right] \left[1 + C^2 \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right] - \frac{1}{2r} \frac{dr}{dz}$$

質量(流量) 保存方程式

$$ure = 1$$

無次元パラメータ

$$z = \frac{Z}{L}, r = \frac{R}{R_0}, u = \frac{U}{U_0}, f_0 = \frac{FR_0}{\eta_0 Q}, \hat{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}, B = \frac{\pi \Delta P R_0^3}{\eta_0 Q},$$

$$C = \frac{R_0}{L}, f_0 = \frac{F_0 R_0}{\eta_0 Q}, e = \frac{E}{E_0}$$

L : フロストライン長

F_0 : ダイ流出位置張力

R_0 : ダイ流出位置バブル半径

η_0 : ダイ流出粘度

U_0 : ダイ流出位置流出速度

ΔP : ブロー圧力

Q : 体積流量

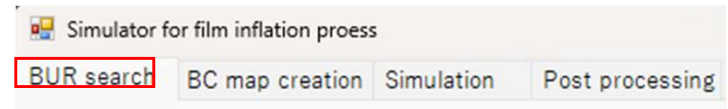
E_0 : ダイクリアランス

10) Polymer Processing ‘Principles and Modeling’,
J.-F. Agassant, P. Avenas, J.-Ph. Sergent
and P. J. Carreau, Oxford University Press (1991)

11) ‘Mathematical Analysis of Film Blowing’,
J. C. Bennett, RMIT (Royal Melbourne Institute of
Technology) University, Ph.D. Theis (2007)

12) ‘フィルム成形のプロセス技術’,
監修 金井俊孝, AndTech (2016)

BUR search : 定常解の有無/多価性の検討



$$2C^2 r^2 \left[f_0 + B(r^2 - 1) \right] \frac{d^2 r}{dz^2} = 6C\hat{\eta} \frac{dr}{dz} + r \left[f_0 - B(3r^2 + 1) \right] \left[1 + C^2 \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dz} = \frac{1}{4C\hat{\eta}} \left[f_0 + B(r^2 - 1) \right] \left[1 + C^2 \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right] - \frac{1}{2r} \frac{dr}{dz}$$

最も基本的な解析方法

問題(方程式の形(B, C, f_0), 境界条件)を決め、解(BUR, DDR)を求める。

※原則: 3パラメータ固定、2パラメータ自由の組み合わせならば、どのような解き方を採用しても良い。

Definition of equations

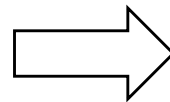
Given parameters :

B, C, f_0 (Equation)

$r(0) = 1, \frac{dr(1)}{dz} = 0, u(0) = 1$ (B.C. conditions)

$z = \frac{Z}{L}$ (Geometry)

Analysis



Solutions

Unknown parameters :

$r(1) = \frac{R(L)}{R(0)} : BUR$ (Blow Up Ratio)

$u(1) = \frac{U(L)}{U(0)} : DDR$ (Draw Down Ratio)

非線形代数方程式の解析方法

$$f(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0,$$

$$g(x) = x^5 - 15.01x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0$$

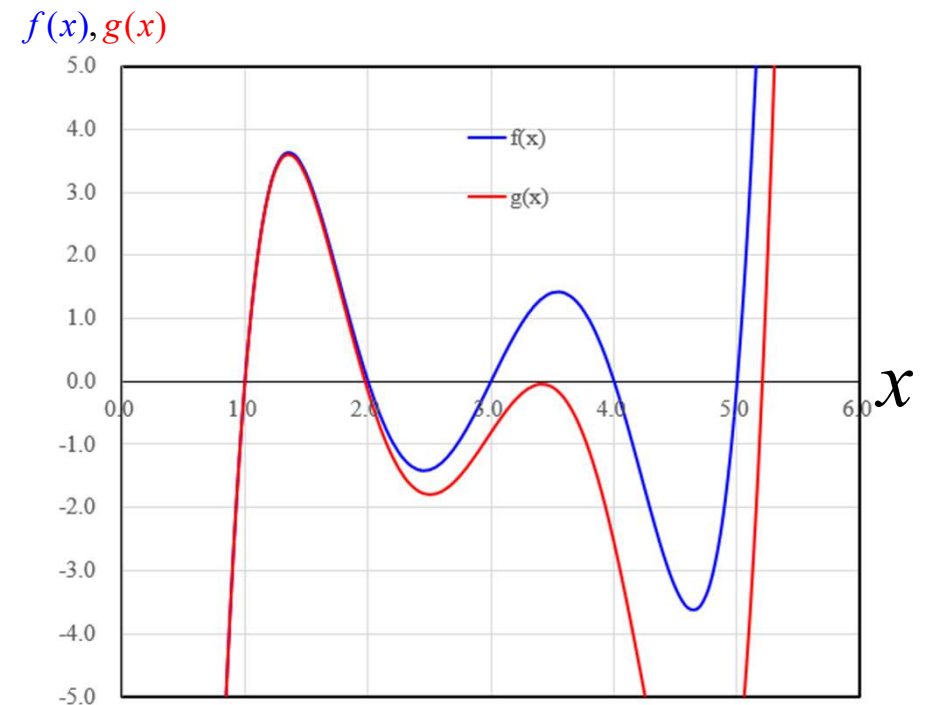
※ n 次の非線形代数方程式に対して5次以上の一般公式は存在しない。
(アーベル・ルフィニーの定理 (Abel-Ruffini theorem))

工学的に関心のある領域: $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$
で $f(x)$ のグラフをプロットし、 $f(x)=0$, 即ち x 軸
との交点を目分量で読み取るのが最も分か
り易く確実な解析方法。

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5$$

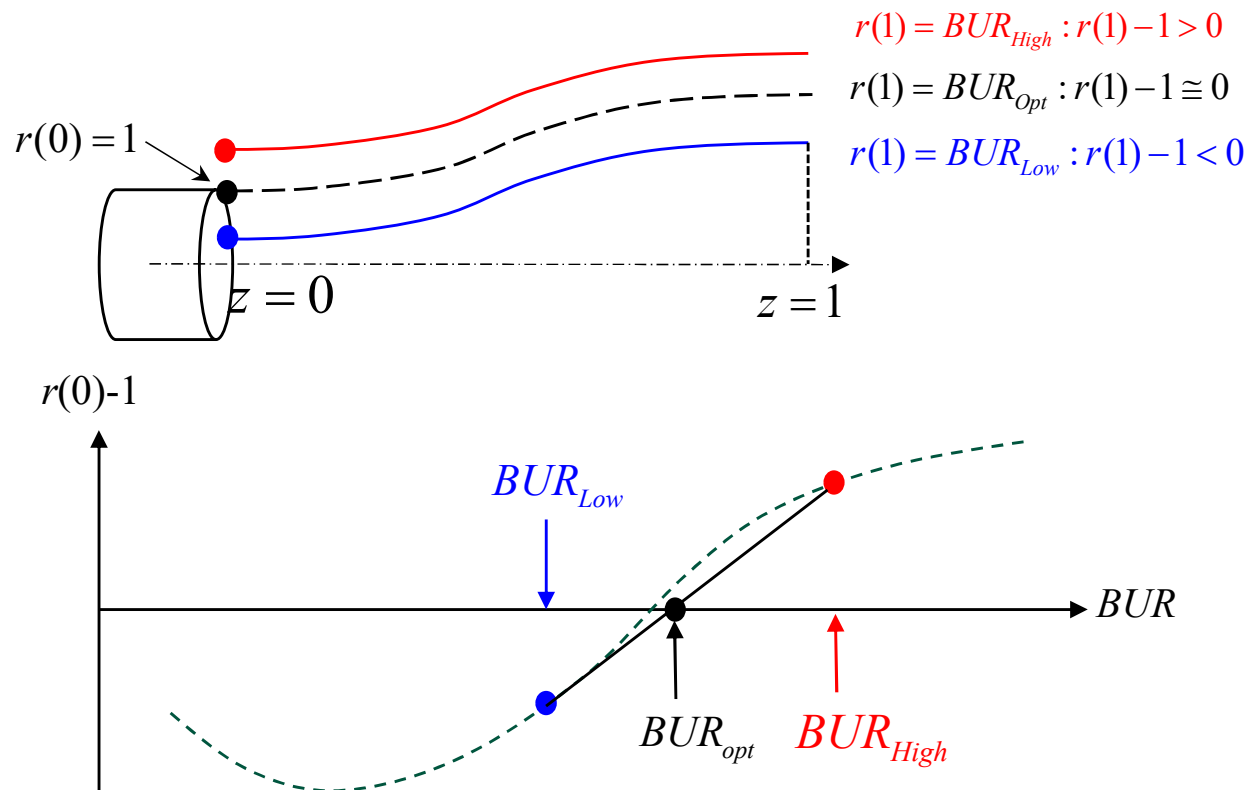
$$g(x) = ??? \rightarrow x \cong 1, 2$$

$$5 < x < 6$$

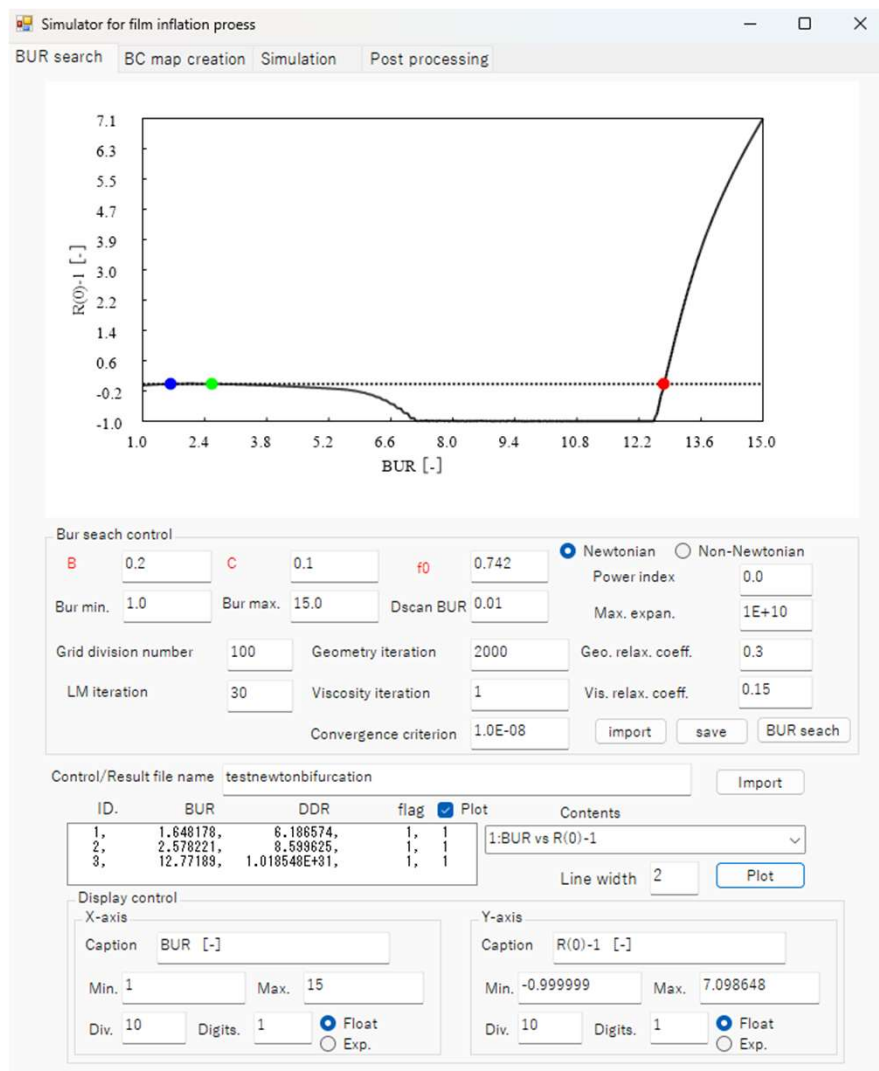


射撃(Shooting)法¹³⁾

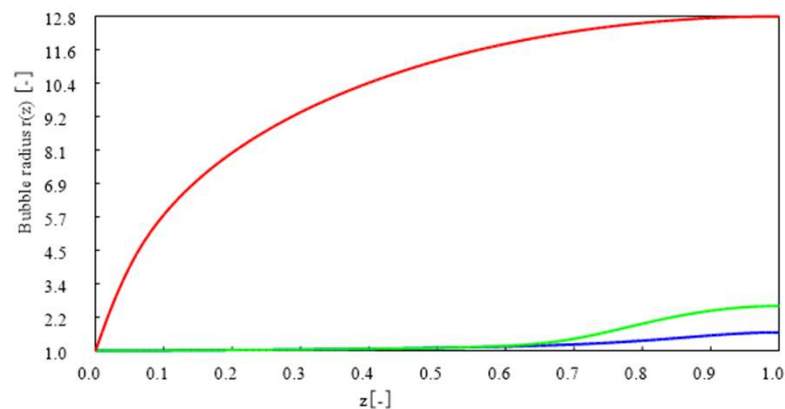
BUR (Blow up ratio)を変化させて、 $r(1)=BUR$, $dr(1)/dz=0$ の2点境界条件の下に半径分布 $r(z)$ を下流側先端($z=1$)からダイ押出位置($z=0$)に向けて逆向きに計算し、 $r(0)=1$ を満足する解を模索する。



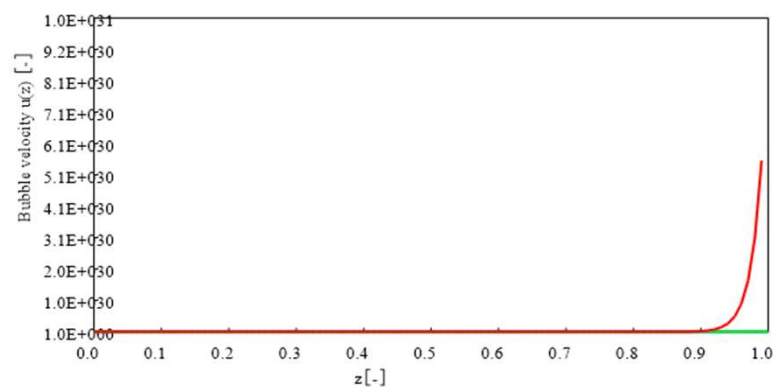
13) X. L. Luo and R. I. Tanner, 'A computer study of film blowing.'
Polymer Engineering and Science, **25**(10):620–629(1985)



BUR vs $r(0)-1$ の解析結果
 (BUR:1~15の範囲を0.01刻みで検索、物性:ニュートン流体)



バブル半径分布の予測結果



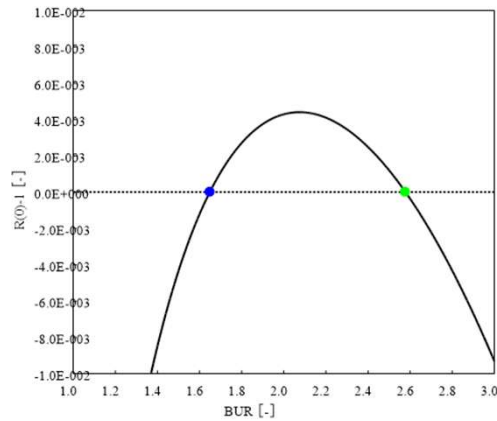
バブル流速分布の予測結果

Luo, Tanner 解析結果¹³⁾との比較

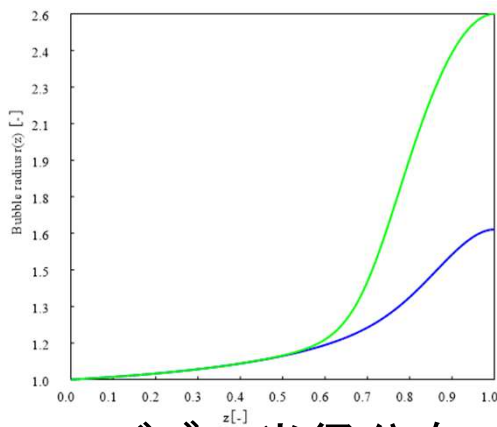
Parameter	Value
B	0.2
C	0.1
f_0	0.742
$BUR^{13)}$	1.65, 2.7, 12.9
$BUR^{*)}$	1.65, 2.6, 12.8
$DDR^{*)}$	6.19, 8.6, 1.02×10^{31}

$^{*)}$ Present work (101グリッド分割モデル)

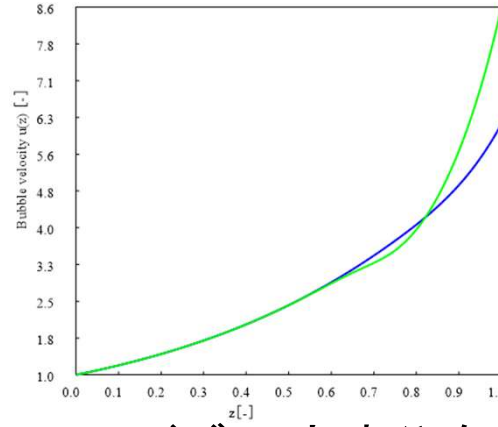
※ 当比較解析において、 $BUR > 12$ の結果は、定常解ではあるが、工学的に許容できない($DDR > 10^{31}$)。



BUR vs $r(0)-1$



バブル半径分布



バブル流速分布

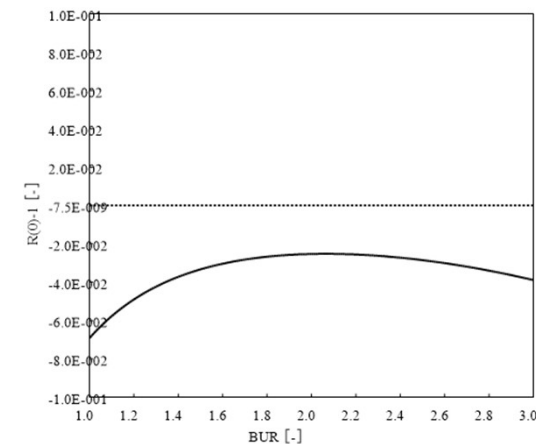
$$B=0.2, C=0.1, f_0=0.742$$

$$B = \frac{\pi \Delta P R_0^3}{\eta_0 Q}$$

$B=0.21, C=0.1, f_0=0.742$
の条件ではどのような結果が得られるか？

予想: B を増加させることは、ブロー
圧力 ΔP を増加させることに相当す
るため、 BUR が相対的に高くなる結
果が得られるであろう。

実際: 予想に反し、工学的に許容可
能な定常解が存在しなくなる。



BUR vs $r(0)-1$

標準的な解析法:

B, C, f_0 を決めて、 BUR, DDR を求める。

成形技術者の要請:

自分が利用可能な装置(押出ダイとインフレーション装置)を活用し、目標とする生産量、フィルム半径(幅)、フィルム層厚を達成する材料特性と最適制御条件を推定したい。すなわち、

C, BUR, DDR を決めて、 B, f_0 の適性値を求める(無論、粘度の非線形性を考慮した上で)。→逆解析ソルバーの開発が必要。

BC map creation : BCマップの作成

BUR, B, C : 規定 $\rightarrow f_0$: Shooting parameter, DDR : 未知量として定常解の存在の有無を判定する。

幾何学的/材料非線形問題に対峙する上で、このマップは、有効な情報となるにちがいない。



伊能忠孝銅像(1745-1818)
(門前仲町、富岡八幡宮にて
撮影、2026/8/9)
1821年『大日本沿海輿地全図』を
幕府(第11代将軍徳川家斉(いえなり))に上呈

Simulator for film inflation process

BUR search **BC map creation** Simulation Post processing

Parametric study control

Blow up ratio **3**

Bmin 0.1 Bmax 0.5 NdivB 51
Cmin 0.05 Cmax 0.2 NdivC 11

Grid division number 100 Geometry iteration 2000
Shooting iteration 30 Geo. relax. coeff. 0.3
Convergence criterion 1E-06

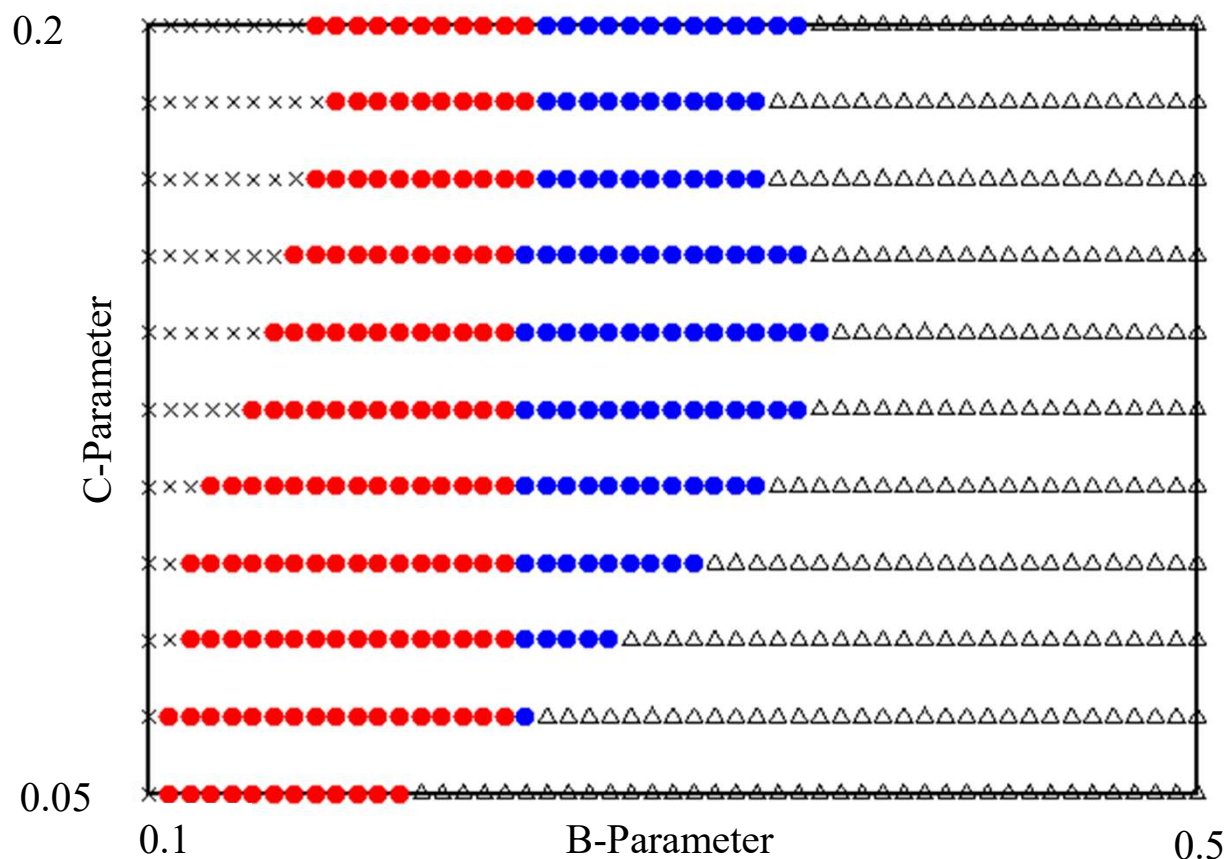
☒ Newtonian ☐ Non-Newtonian
Power index 0 Max. expan. 1E+10
Viscosity iteration 30
Vis. relax. coeff. 0.15
Temperature iteration 100
Temp. relax. coeff. 0.5

import save Parametric study

← BUR の指定欄

} B と C の可変域、刻み幅を設定

解析プログラムは、
 $NdivB \times NdivC$ のケーススタディ
を自動遂行し、各 (B, C) 条件で
 BUR 指定値を満足する定常解
の有無を判定する。この設定例
では、 $51 \times 11 = 561$ グリッドの状
態が可視化される。



× : 定常解無

定常解有

○ : Smooth profile

● ; $DDR < DDR_{assign}$

● ; $DDR > DDR_{assign}$

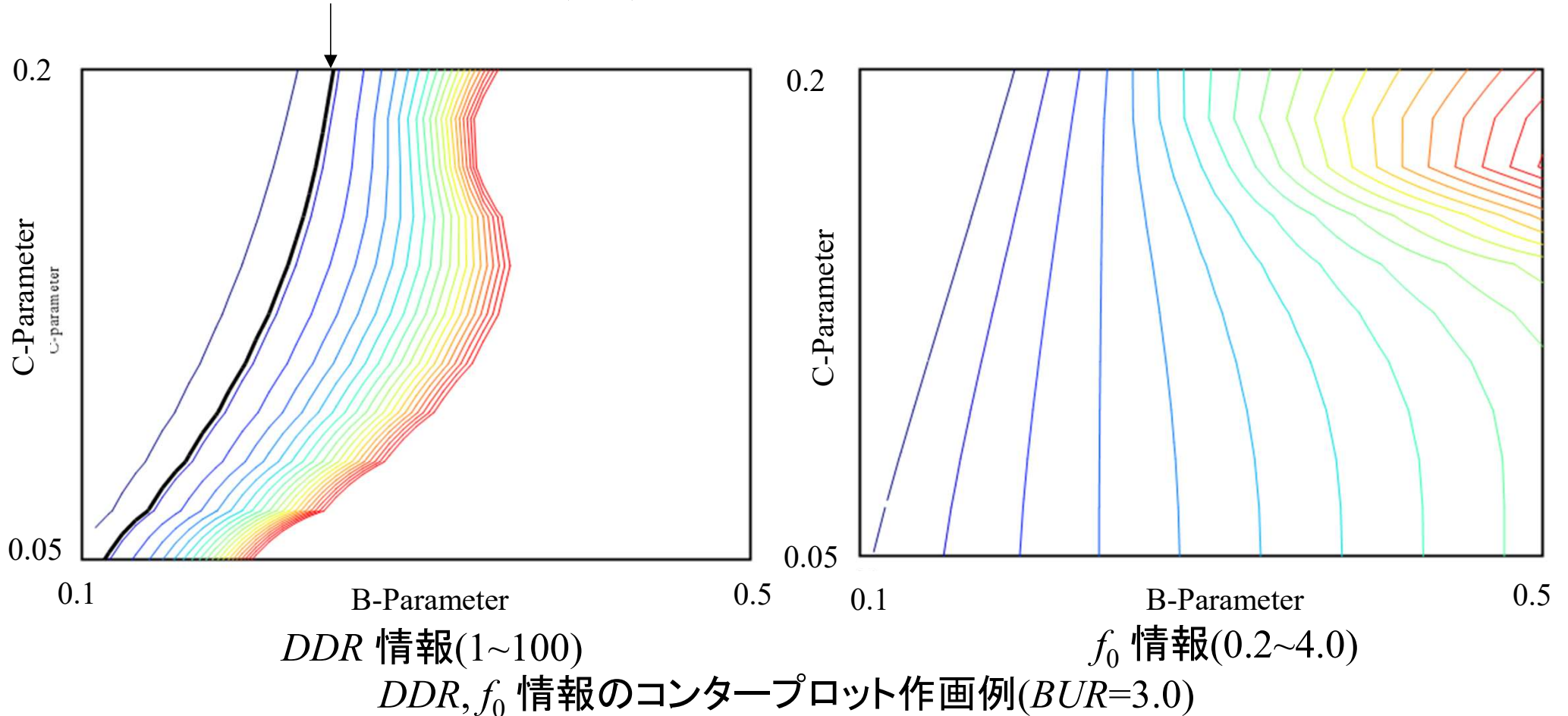
△ : Neck in profile

BCマップ作成例

($BUR=3.0$, $B:0.1\sim0.5$, $C:0.05\sim0.2$, $NdivB=51$, $NdivC=11$,
561グリッド, 物性: ニュートン流体)

※このマップ情報は、 BUR の指定値に応じて変化する(人によって見る景色が違う)。

$BUR=3.0, DDR=10.0$ を満足する(B, C)条件の可視化情報



※逆解析ソルバーの定量化目標は、 B, C, f_0, BUR, DDR の5つのパラメータが構成する5Dパラメータ空間内で、 BUR, DDR が規定値に一致する特性曲線を見出すこと

Simulation

- Profile calculation : BUR, B, C, f_0 を指定し、バブルプロファイル(半径、流速、温度、結晶化度)を計算(DDR は未知量として扱う)
- Nonlinear calculation : C, BUR, DDR を指定し、 B を調整、 f_0 をShootingパラメータとして定常解を検索するプログラム(逆解析ソルバー)

Simulator for film inflation process

BUR search BC map creation **Simulation** Post processing

B,C parameter set

Case	B	C	f0	Status
1,	0.74,	0.15,	2.268854,	Optimized condition(Smooth profile)
2,	0.76,	0.15,	2.639787,	Optimized condition(Smooth profile)

B-parameter: Add Insert

C-parameter: Modify All delete

f0-parameter: Delete

Calculation control

Case	R0(mm)	FL(mm)	QF(m3/s)	Δp(Pa)
1,	75,	500,	3E-05,	335.0034
2,	75,	500,	3E-05,	353.1118

R0(m): FL(m): H0(mm): QF(m3/s): Δp(Pa):

Newtonian ☐ Non-Newtonian ☒

η0(Pa):

ADD Modify Insert

All delete Delete

BUR-target: 3.7 DDR-target: 5 Grid division number: 100

Geometry iteration: 3000 Shooting iteration: 200

Geo. relax. coeff.: 0.3 Tolerance: 1E-06 Max. expan.: 1000

Viscosity iteration: 200 Power index: 0

Vis. relax. coeff.: 0.5 Temp. relax. coeff.: 0.5

Temperature iteration: 100 ☐ Profile calculation ☒ Nonlinear calculation

Material property: testnonnewton Select Set

Thermal boundary condition: testtbc Select Set

Crystallization parameter: testcryst Select Set

testnonnewtonfinalddrcompfi Import

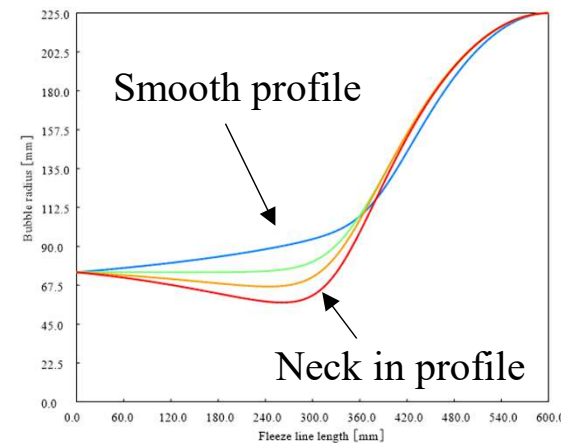
Save Solver execute

Simulation タブメニュー

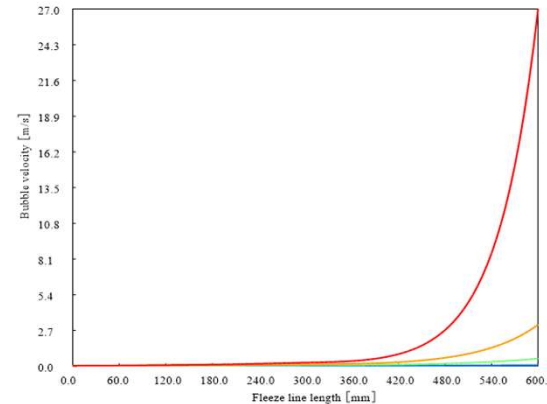
バブルプロファイルの計算

BCマップ情報を利用すれば、バブルプロファイルは容易に且つ短時間で求めることが可能(∵予め定常解の存在が保証されてるため)

半径分布



流速分布



※圧力を上昇させると口径が縮小するのは、形状を保つために引取速度が増加するから。

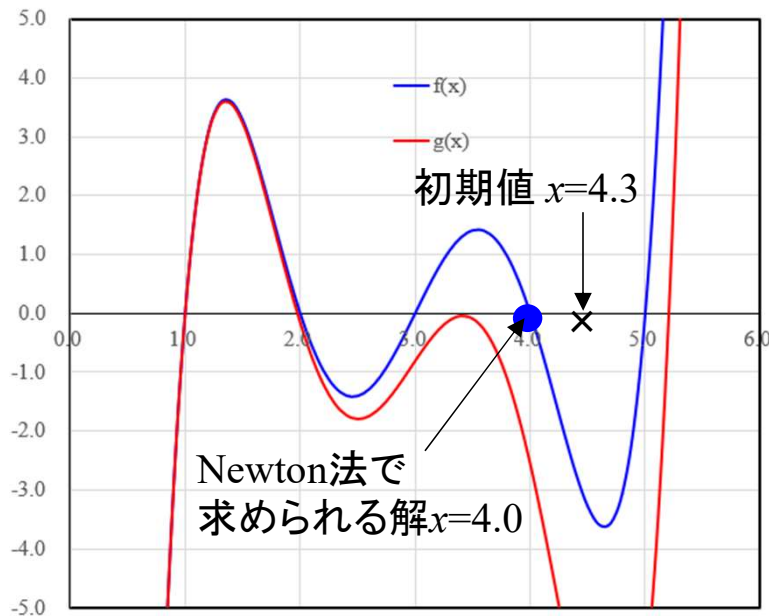
3) Post processing

2) Profile calculation

1) 予めBCマップ上でプロファイルの作画対象とする複数のグリッドをマウスクリック選択(この選択情報は、BUR search及びSimulation タブメニューへインターラクティブに反映)

逆解析

非線形方程式の解析では、初期値の設定が得られる解の品質を大きく左右する。**適切な初期値を設定するには豊富な経験と勘を要する**が、BCマップ情報は、この制限を緩和する。プロセスや数値解析に関して知見が少ない技術者でも当情報を活用することで所定の定常解を見出せる可能性が高まる。



初期値 $x=4.3$ としてNewton法で前述の5次方程式を解析すると $x=4.0$ が求まるはず。言い換えれば、当初期値では、他の解は求められない。

例) $C=0.125, BUR=3.0, DDR=5.0$ の定常解を逆解析で求める際の適切な初期条件の設定法

$BUR=3.0, C=0.125$ ライン上の情報



$DDR=4.723$

$DDR=5.514$

$DDR=5.0$ の定常解を与える条件は、この2点グリッド間に存在する可能性が高い。この2点情報を非線形逆解析の初期条件とする。

2点グリッド情報(逆解析の初期値)

B,C parameter set

Case	B	C	f0	Status
1,	0.172,	0.125,	0.5440155,	Optimized condition(Smooth profile)
2,	0.18,	0.125,	0.5948089,	Optimized condition(Smooth profile)

BUR,DDR規定値

BUR-target

3

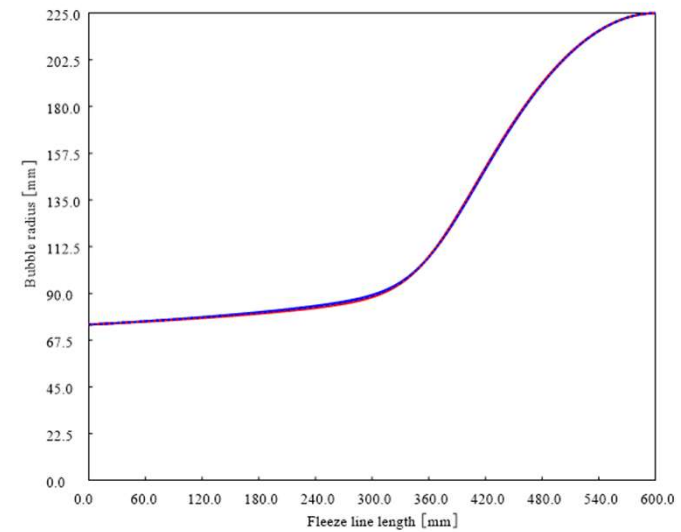
DDR-target

5

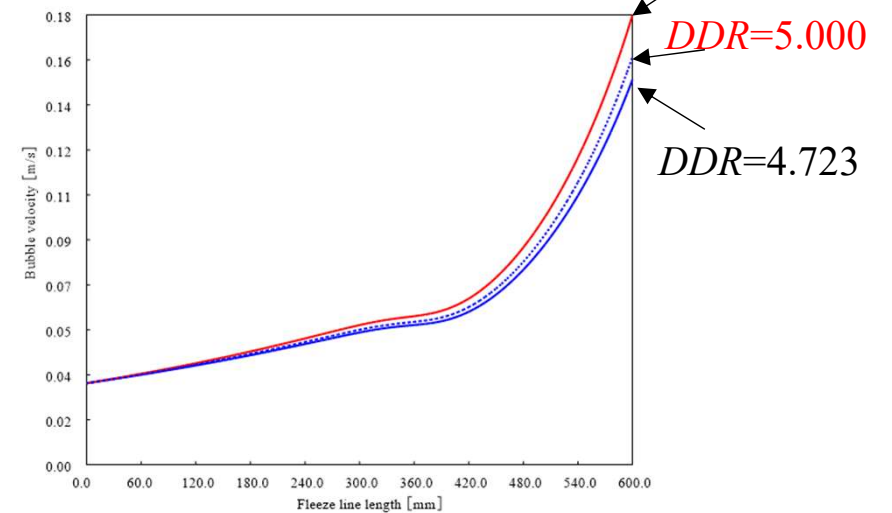
```
updated B_L,B_R = 0.174934082031250 0.174934204101562
ish= 17 Bmid= 0.174934143066406 BUR_mid=
2.99999946593168 DDR_mid= 5.00000533160795 F_mid=
5.331607953351636E-006
--- search_B_for_DDR saturated at ish= 17
B,f0 inverse shooting normal end !!!
Press return key
```

17回の f_0 Shooting 計算で収束
($BUR_{calc}=2.99999, DDR_{calc}=5.00001$)

半径分布



流速分布



逆解析例 ($C=0.125, BUR=3.0, DDR=5.0$, 物性:ニュートン流体)

逆解析結果の多価性の検討(Bur searchへの情報フィードバック)

$$C=0.125, BUR=3, DDR=5 \rightarrow B=0.1749341, f_0=0.5627263$$

BUR=1.78, DDR=2.92 の別解

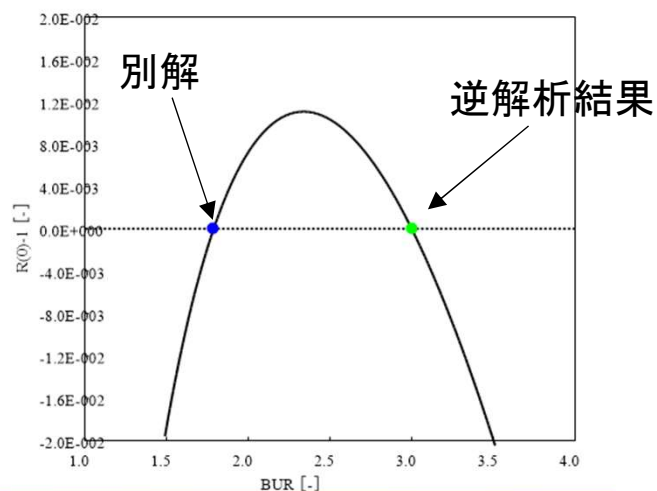
```
Converged iter_bis=      15
0.174934100000000      , 0.125000000000000      , 0.562726300000000
1.78770416259766      , 2.92445861555145      , 1.000000000000000
```

BUR=3.0, DDR=5.0 の逆解析結果と一致した解

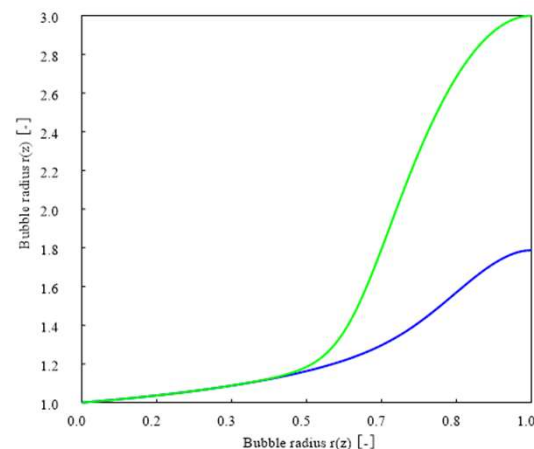
```
Converged iter_bis=      10
0.174934100000000      , 0.125000000000000      , 0.562726300000000
3.0000097652500      , 5.00004543398625      , 1.000000000000000
```

BUR=10.16, DDR=2.78 × 10¹⁶ の別解(工学的非許容解)

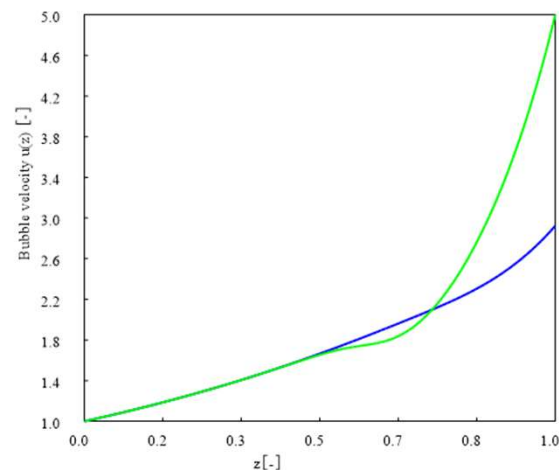
```
Converged iter_bis=      20
0.174934100000000      , 0.125000000000000      , 0.562726300000000
10.1598152637482      , 2.788212052005921E+016 , 1.000000000000000
```



半径分布



流速分布



非ニュートン流体解析への機能拡張

Material form

Constitutive equation model
0:Viscous model(Temp.& Cryst. Depend)

☐ Newtonian ☒ Non-Newtonian

Temperature shift factor
☒ Arrhenius ☐ WLF

Ea [J/mol] 5.0e04
Ref. Temp. [°C] 200.0

Crystallization shift factor
Acryst [-] 5.0
Ncryst [-] 0.5

Viscous parameters
Zero shear viscosity [Pa · s] 2.0e4
mvisc [-] 0.0
Strain rate upper limit:eps_max 10.0

Density [kg/m3] 950.0
Heat capacity [J/(kg · K)] 1200.0

File name import Save close

$$\eta(T, X, \dot{\epsilon}) = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{mvisc} a_T a_{cryst} \eta_0$$

$$a_T = \exp \left[\frac{E_a}{R_s} \left(\frac{1}{T + 237.15} - \frac{1}{T_{ref} + 237.15} \right) \right]$$

$$a_{cryst} = \exp(A_{cryst} X^{N_{cryst}})$$

非ニュートン温度・結晶化度依存純粘性モデル
(現時点で完成済)

Material form

Constitutive equation model
1:KBKZ viscoelastic model

☐ Newtonian ☒ Non-Newtonian

Temperature shift factor
☐ Arrhenius ☒ WLF

C1 [-] 5.8
C2 [°C] 120.8
Ref. Temp. [°C] 200

Crystallization shift factor
Acryst [-] 5
Ncryst [-] 0.5

Linear spectrum

Mode	Gk [Pa]	λ k [s]
1.	130000.	0.001
2.	72000.	0.01
3.	35000.	0.1
4.	8200.	1
5.	950.	10
6.	70.	100

Model parameter
KBKZ-LT
α 15
β 0.10
θ 0

Density [kg/m3] 950
Heat capacity [J/(kg · K)] 1200

File name kbkz import Save close

$$\tau(t) = \frac{1}{1-\theta} \sum_{k=1}^{Mode} \frac{G_k}{\lambda_k} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda_k}\right) \frac{\alpha}{\alpha - 3 + \beta I_1 + (1-\beta)I_2} \times [C^{-1}(t') + \theta C(t')] dt'$$

$$\lambda_k(T) = a_T \lambda_k(T_{ref}), G = a_{cryst} G_0$$

$$a_T = \exp \left[\frac{C_1 (T - T_{ref})}{C_2 + T - T_{ref}} \right]$$

$$a_{cryst} = \exp(A_{cryst} X^{N_{cryst}})$$

K-BKZ粘弾性モデル
(現時点で開発中)

Thermal boundary condition

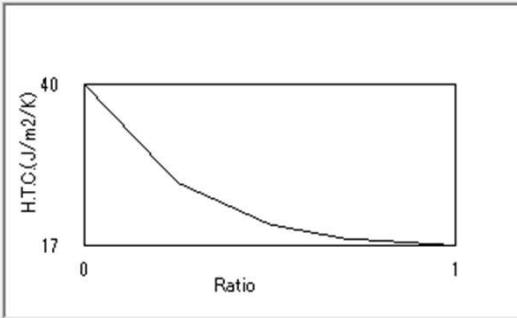
$$\rho C_p Q \cos \theta \frac{dT}{dz} = -2\pi R \left[h(T - T_{air}) + \sigma_b \varepsilon (T^4 - T_{air}^4) \right] + Q \Delta H_{cryst} \cos \theta \frac{dX}{dz},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dz} \right)^2}}$$

☐ Constant ☐ Exponent profile ☒ Polyline

Emissivity [-]

Die outlet temperature [°C]



Ratio	H.T.C.	Tair
0.0,	40.0,	30.0
0.25,	28,	30.0
0.5,	20,	30.0
0.7,	18,	30.0
1,	17,	30.0

Ratio [-]

Heat transfer coefficient [W/(m² · K)]

Air temperature [°C]

File name

温度境界条件
設定フォーム

Crystallization model parameters set form

Avrami-Nakamura crystallization model

$$v_z \cos \theta \frac{\partial X}{\partial z} = nK(T) \left(1 - \frac{X}{X_{max}} \right) \left[-\ln \left(1 - \frac{X}{X_{max}} \right) \right]^{\frac{n-1}{n}},$$

$$K(T) = K_0 \exp \left[-\frac{E_a}{R_g(T + 273.15)} \right] \cdot WT \cdot FIC,$$

$$WT = \frac{T_{start} - T}{T_{start} - T_{end}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dz} \right)^2}},$$

$$FIC = 1 + a\varepsilon^b$$

Crystallization rate constant K0 [s-1]

Activation energy Ea [J/mol]

Avrami index n [-]

Maximum limit of X:Xmax [-]

Temperature window

☒ ON ☐ OFF: WT=1

Tstart [°C]

Tend [°C]

Flow induced model parameters

a [s^b]

b [-]

Number density of nuclei [1/m³]

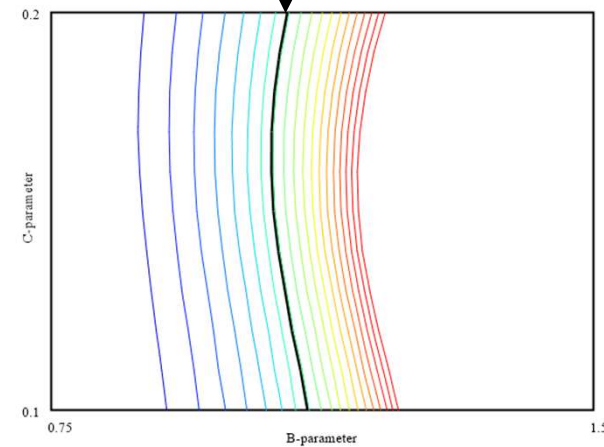
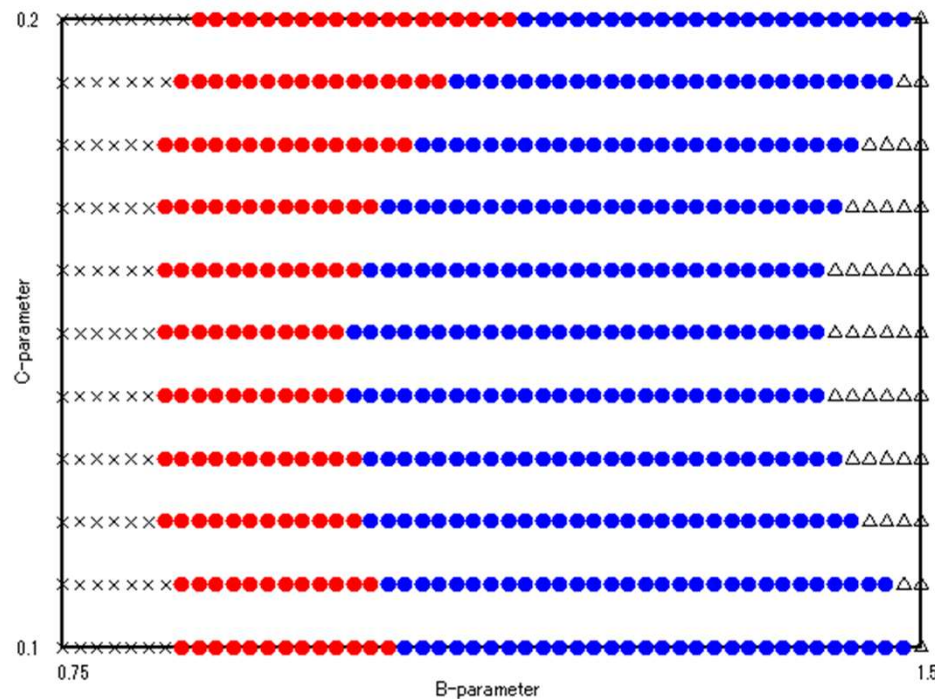
Latent heat of crystallization [J/mol]

File name

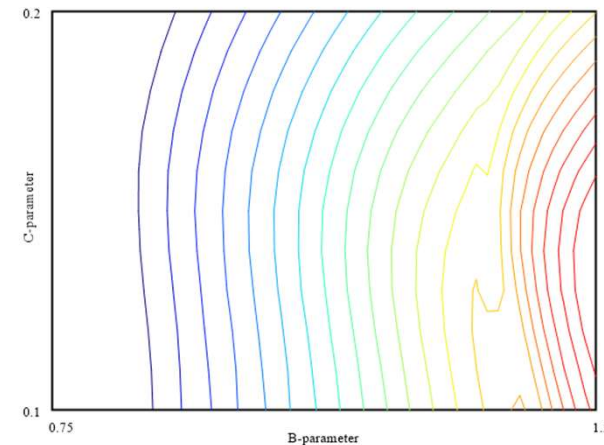
Avrami-Nakamura 結晶化モデル
設定フォーム

BCマップの作成 (非ニュートン粘性流体解析)

$BUR=3.7, DDR=10.0$ を満足する(B,C)条件の可視化情報



DDR 情報(2~20)

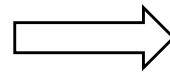
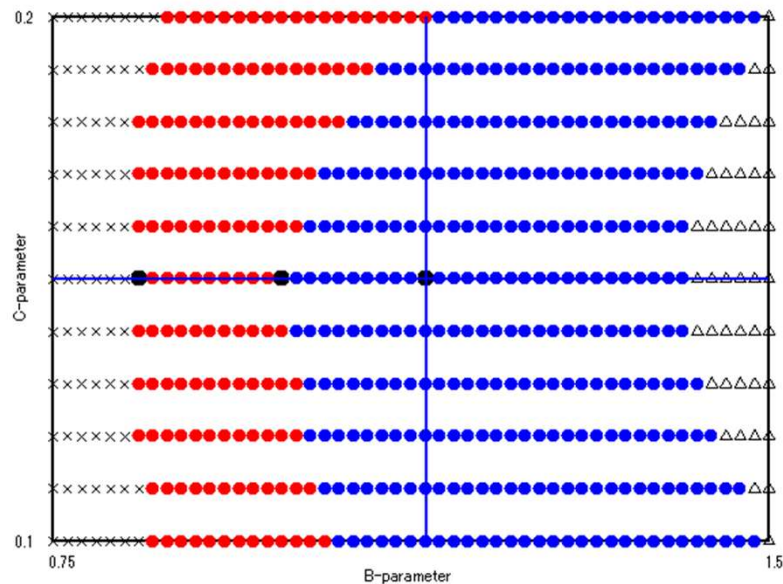


f_0 情報(2~11)

BCマップ作成例

($BUR=3.7, B:0.5\sim1.5, C:0.1\sim0.2, NdivB=51, NdivC=11,$
561グリッド, 物性: 温度・結晶化度依存非ニュートン流体)

バブルプロファイルの計算



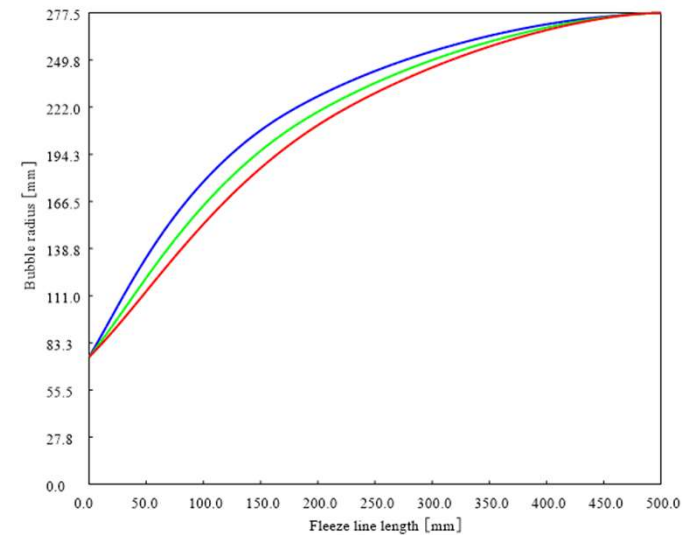
2) Profile calculation

マウスクリック選択情報

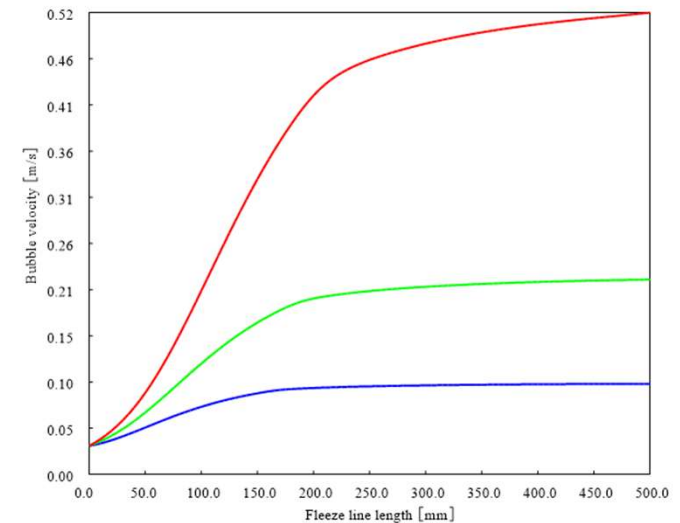
Case	B	C	f0	Status
1,	0.84,	0.15,	2.134398,	Optimized condition(Smooth profile)
2,	0.99,	0.15,	3.862005,	Optimized condition(Smooth profile)
3,	1.14,	0.15,	5.827553,	Optimized condition(Neck-in profile)

※半径分布がSmooth profile,流速分布が下流側で飽和傾向を示す点がニュートン流体解析結果と大きく異なる。

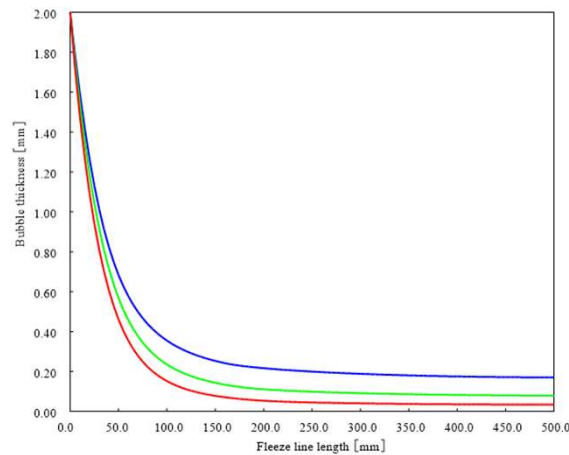
半径分布



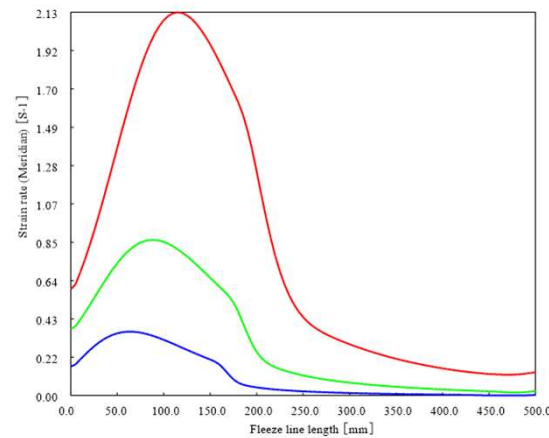
流速分布



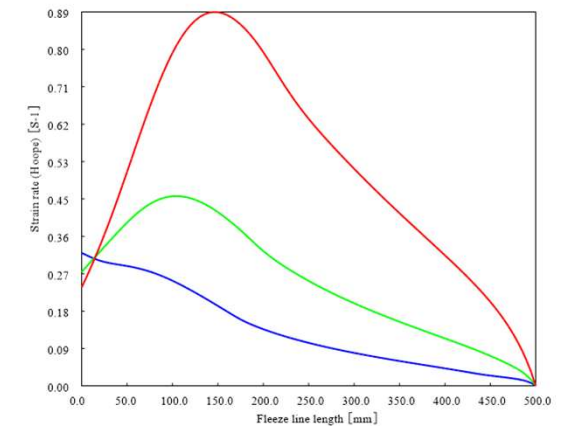
層厚分布



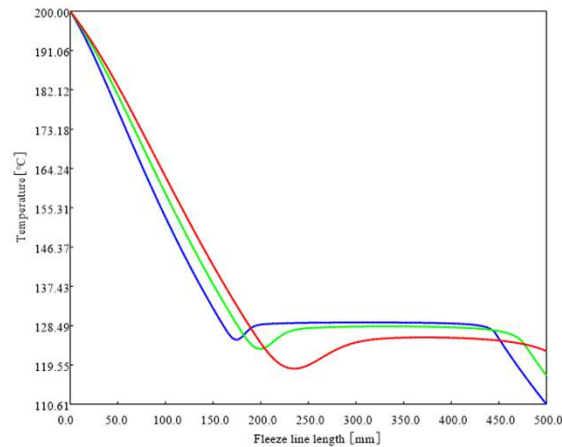
子午線(Meridian)方向
ひずみ速度分布



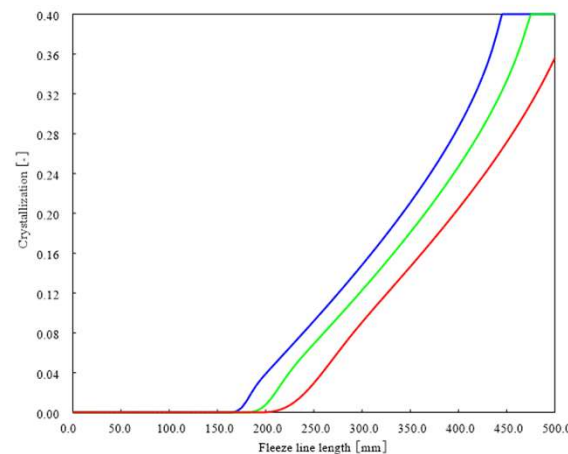
周(Hoop)方向
ひずみ速度分布



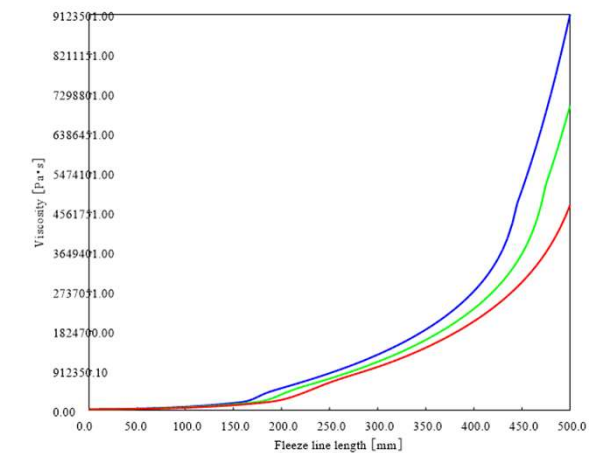
温度分布



結晶化度分布



粘度分布



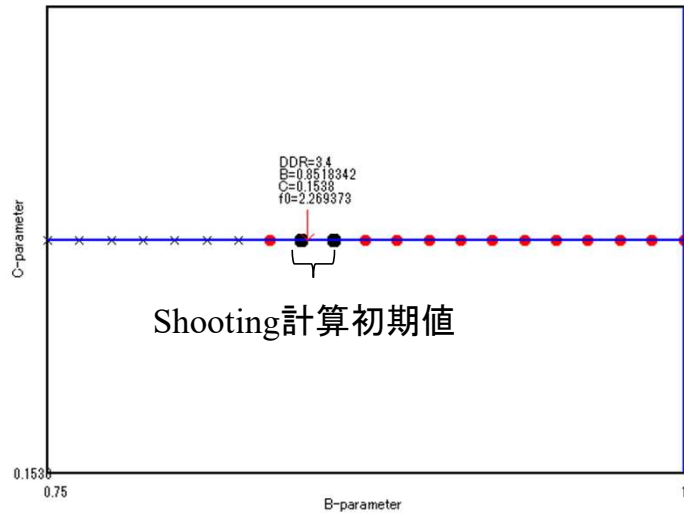
- 結晶化発熱と輻射・熱伝達による冷却効果が釣り合い、中流域で温度分布が平坦になる。
- 温度分布が平坦な中流域での粘度上昇は結晶化の促進に起因。一方、結晶化が飽和後の下流側粘度上昇は温度低下に起因。
- 結晶化と温度低下に伴う粘度上昇に伴って流速分布は飽和傾向を示し、各方向のひずみ速度が0に漸近する傾向を示す。
- このニュートン流体解析では表現できない傾向は、先端がフリーズ(固化)する条件と整合する。フロスト条件: $dR(L)/dz=0$, $dU(L)/dz=0$

逆解析 例) $C=0.1538, BUR=3.7, DDR=3.4$ の定常解を実現する最適条件 B, f_0 の推定

BUR-target 3.7 DDR-target 3.4

```
updated B_L, B_R = 0.851922607421875 0.851923370361328
ish= 15 Bmid= 0.851922988891602 BUR_mid=
3.69999988409139 DDR_mid= 3.40000041592483 F_mid=
4.159248270241278E-007
--- search_B_for_DDR converged at ish= 15
B, f0 inverse shooting normal end !!!
Press return key
```

Shooting計算15回で収束



Shooting計算初期値

	B	C	f0	Plot
1,	0.85,	0.1538,	2.248075,	1
2,	0.8625,	0.1538,	2.393219,	1
3,	0.851923,	0.1538,	2.269848,	1

Shooting計算初期値

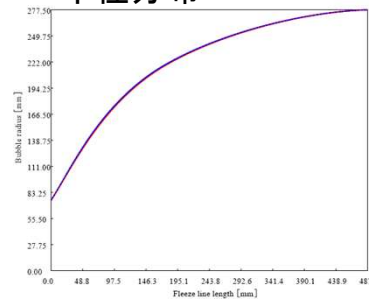
Shooting計算収束値(最適推定条件)

Blow up ratio 3.7

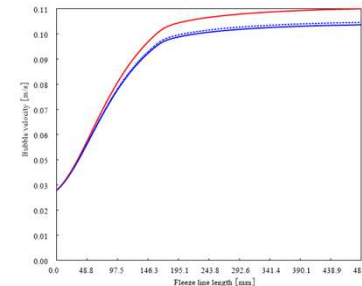
Bmin 0.75 Bmax 1 NdivB 21
Cmin 0.1538 Cmax 0.1538 NdivC 1

設備パラメータCを
予め設定する場合は1

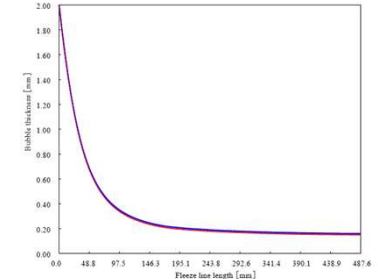
半径分布



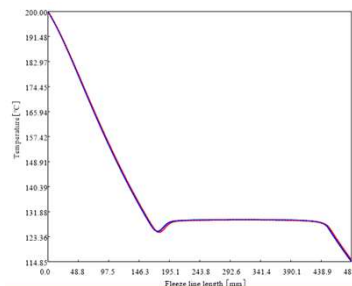
流速分布



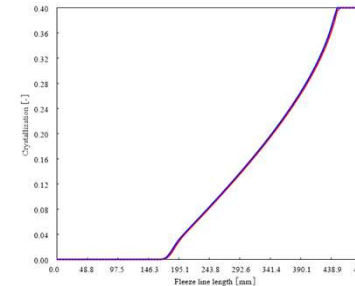
層厚分布



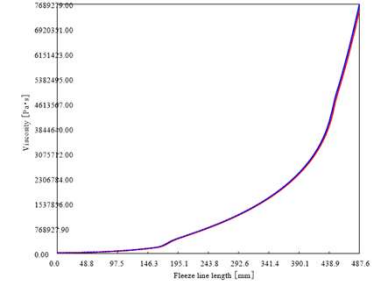
温度分布



結晶化度分布



粘度分布



まとめ

成果：

1) Material fit Ver.6.0.0

非線形純粘性モデルの拡充

- ・粘度フィッティング精度の向上に伴う各種解析ソルバーによる成形現象予測精度の向上。

線形粘弾性モデリング機能の再構築

- ・チフォノフ正則化法とLカーブ法を併用し、ソフトウェアとのインターラクティブな情報交換を通じて、粘弾性の基礎情報(線形粘弾性)である緩和弾性率と緩和時間を精度良く且つ平滑に定量化可能。

出力機能の追加

- ・緩和弾性率と緩和時間を元に定量化される各種レオロジー特性：定常せん断粘度、第1法線応力差。

2) Inflation film Simulator Ver.1.0.0

幾何学的/材料非線形問題の逆解析ソルバーの開発

- ・成形技術者の要請に応じて変化する最適化支援マップ情報の生成機能を実装。
- ・当マップ情報を利用し、成形技術者が要請するフィルム幅とフィルム肉厚を達成する最適制御条件の推定が可能(現状、粘度の温度/結晶化度依存性を考慮可能なレベル)。

今後の課題：

1) Material fit Ver.7.0.0

- ・非線形粘弾性モデリング機能の再構築(Giesekus, PTT, K-BKZ, etc.)

2) 問題向き粘弾性解析ソルバーの開発：汎用性よりも操作性と精度を重視した開発

- ・Film casting, Film coating, Film inflation, Parison formation & blowing, etc.